Elemente der Maßtheorie

WS 00/01

Michael Falk

Literatur:	**Halmos:**	**Measure Theory**
	Henze:	**Einführung in die Maßtheorie (B.I.)**
	Bauer:	**Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie**

1 Mengen

1. $A \subset B :\iff (x \in A \Rightarrow x \in B)$
   $A = B :\iff A \subset B, B \supset A$

   X Grundmenge, $\emptyset$ leere Menge
   $\mathcal{P}(X) := \{A : A \subset X\}$ (Potenzmenge von X)
   $|\,\mathcal{P}(X)\,| =$ Anzahl der Elemente von $\mathcal{P}(X) = 2^{|X|}$, falls $|X| < \infty$

2. $A_1 \cup A_2 := \{x \in X : x \in A_1 \text{ oder } x \in A_2\}$, (Vereinigung)
   $\bigcup_{i \in I} A_i := \{x \in X : x \in A_i \text{ für mind. ein } i \in I\}$

   $(A_i)_{i \in I}$ Familie von Teilmengen von X,
   $\bigcup \mathcal{A} := \{x \in X : x \in A \text{ für mind. ein } A \in \mathcal{A}\}, \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$

   $\bigcup \emptyset = \emptyset, \quad A_1 \cup A_2 = A_2 \cup A_1$
   allgemein: $\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} A_{\pi(i)}$, falls $\pi : I \to I$ bijektiv.

3.
$$
\begin{aligned}
A_1 \cap A_2 &:= \{x \in X : x \in A_1 \text{ und } x \in A_2\} \quad \text{(Durchschnitt)}\\
\bigcap_{i \in I} A_i &:= \{x \in X : x \in A_i \text{ für alle } i \in I\}\\
\bigcap \mathcal{A} &:= \{x \in X : x \in A \text{ für alle } A \in \mathcal{A}\},\ \text{falls } \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)\\
A_1 \cap A_2 &= A_2 \cap A_1\\
\bigcap_{i \in I} A_i &= \bigcap_{i \in I} A_{\pi(i)},\ \text{falls } \pi : I \to I \text{ bijektiv}
\end{aligned}
$$

4.
$$
\begin{aligned}
A_1 \times A_2 &:= \{(x_1, x_2) : x_1 \in A_1, x_2 \in A_2\}\\
&= \{f : \{1,2\} \to A_1 \cup A_2, \quad \text{mit} \quad f(1) \in A_1,\\
&\qquad f(2) \in A_2\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{allgem.: } \times_{i \in I} A_i &= \{f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i, f(i) \in A_i \text{ für } \forall\, i \in I\}\\
&= \{(x_i)_{i \in I} : x_i \in A_i \text{ für } \forall\, i \in I\}\\
\text{speziell: } A^I &:= \times_{i \in I} A_i \text{ mit } A_i = A \text{ für alle } i \in \mathbb{N},\\
&\quad A, I \text{ bel. Mengen, vgl. } \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{\{1,2,\ldots,n\}}
\end{aligned}
$$

Assoziativgesetz: bei geeigneter Identifizierung:
$\times_{j\in J}(\times_{i\in I_j} A_i) = \times_{i\in I} A_i$, falls $I = \bigcup\limits_{j\in J} I_j$ eine disjunkte Zerlegung von I ist.
Beispiel: $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^5$

5. **Distributivgesetze**

$$\begin{aligned} A\cap(B\cup C) &= (A\cap B)\cup(A\cap C)\\ A\cup(B\cap C) &= (A\cup B)\cap(A\cup C)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{allg.:} \bigcap_{i\in I}\left(\bigcup_{j\in I_i} A_{i,j}\right) &= \bigcup_{f\in\times_{i\in I} I_i}\ \bigcap_{i\in I} A_{i,f(i)}\\ \bigcup_{i\in I}\left(\bigcap_{j\in I_i} A_{i,j}\right) &= \bigcap_{f\in\times_{i\in I} I_i}\ \bigcup_{i\in I} A_{i,f(i)}\end{aligned}$$

6. $A^c := \{x\in X : x\notin A\}, \quad A\setminus B := A\cap B^c.$

Dualitätsprinzip
$\left(\bigcup\limits_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap\limits_{i\in I} A_i^c, \left(\bigcap\limits_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup\limits_{i\in I} A_i^c$

7. **Symmetrische Differenz:**

$$\begin{aligned} A\triangle B &:= (A\cap B^c)\cup(A^c\cap B)\\ &= (A\setminus B)\cup(B\setminus A)\\ A=B &\iff A\triangle B=\emptyset\end{aligned}$$

$(\mathcal{P}(x),\triangle)$ abelsche Gruppe, d.h. $A\triangle B = B\triangle A$,
$(A\triangle B)\triangle C = A\triangle(B\triangle C), A\triangle\emptyset = A\,\forall A\in\mathcal{P}(X)$
$A\triangle A=\emptyset$
$A\triangle B = \{x\in X : x$ in genau einer der Mengen $A,B\}$

$A_1\triangle\ldots\triangle A_n = \{x\in X : x\in A_i$ für eine ungerade Anzahl der Indizes $i\in\{1,\ldots,n\}\}$

8. **Konvergenz von Mengen**
$A_1, A_2, \ldots$ Folge von Mengen

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to\infty} A_n &:= \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcap_{m\geq n} A_m = \{x\in X : x\in A_n \text{ "fast immer" (f.i.)}\}\\ \limsup_{n\to\infty} A_n &:= \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{m\geq n} A_m = \{x\in X : x\in A_n \text{ "unendl. oft" (u.o.)}\}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
A_n \to A \quad &:\Longleftrightarrow \quad \liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n = A \\
A_n \uparrow A \quad &:\Longleftrightarrow \quad A_1 \subset A_2 \subset \dots \text{ und } A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \\
A_n \downarrow A \quad &:\Longleftrightarrow \quad A_1 \supset A_2 \supset \dots \text{ und } A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n
\end{aligned}
$$

9.

$$
\begin{aligned}
&1_A : X \to \{0,1\} && \text{mit} \quad 1_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \in A \\ 0 & \text{für} \quad x \notin A \end{cases} \\
&f : \mathcal{P}(X) \to \{0,1\}^X && \text{mit} \quad \mathcal{P}(X) \ni A \mapsto 1_A \in \{0,1\}^X \text{ ist Bijektion.}
\end{aligned}
$$

$A \subset B :\Longleftrightarrow\; 1_A \le 1_B$

$1_{\bigcup\limits_{i\in I} A_i} = \sup\limits_{i\in I} 1_{A_i}$, d.h. $1_{\bigcup\limits_{i\in I} A_i}(x) = \max\limits_{i\in I} 1_{A_i}(x)$

$1_{\bigcap\limits_{i\in I} A_i} = \inf 1_{A_i}$

$1_{A^c} = 1 - 1_A, 1_{A\triangle B} = |\, 1_A - 1_B \,|$

$1_{\liminf\limits_{n\to\infty} A_n} = 1_{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \bigcap\limits_{m\ge n} A_m} = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} 1_{\bigcap\limits_{m\ge n} A_m}$

$= \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \inf\limits_{m\ge n} 1_{A_m} = \lim\limits_{n\to\infty} (\inf\limits_{m\ge n} 1_{A_m})$

$= \liminf\limits_{n\to\infty} 1_{A_n}$

$1_{\limsup\limits_{n\to\infty} A_n} = \limsup\limits_{n\to\infty} 1_{A_n}$

$$
\begin{aligned}
A_n \to A \quad &\Longleftrightarrow \quad 1_{A_n} \to 1_A \\
&\Longleftrightarrow \quad 1_{A_n}(x) \to 1_A(x)\,\forall\, x \in X \\
A_n \uparrow A \quad &\Longleftrightarrow \quad 1_{A_n} \uparrow 1_A \\
A_n \downarrow A \quad &\Longleftrightarrow \quad 1_{A_n} \downarrow 1_A
\end{aligned}
$$

2 Mengensysteme

Generalvor.: X beliebige Menge.

2.1 Definition

$\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(X)$ beliebig, dann:
$\mathcal{H}$ durchschnittsstabil: $\iff \forall H_1, H_2 \in \mathcal{H} : H_1 \cap H_2 \in \mathcal{H}$
$\mathcal{H}$ vereinigungsstabil $:\iff \forall H_1, H_2 \in \mathcal{H} : H_1 \cup H_2 \in \mathcal{H}$.

2.2 Definition

$\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(X)$, dann:
$\mathcal{H}$ Algebra (über X) $:\iff$

$$\begin{aligned} \alpha(i) &\quad X \in \mathcal{H} \\ \alpha(ii) &\quad H \in \mathcal{H} \Longrightarrow H^c \in \mathcal{H} \\ \alpha(iii) &\quad \mathcal{H} \cup\text{–stabil.} \end{aligned}$$

2.3 Satz

$\mathcal{H}$ Algebra $\iff \alpha(i), \alpha(ii), \alpha(iii)'$, wobei
$\alpha(iii)' \mathcal{H} \cap$–stabil

Beweis: $H_1 \cap H_2 = (H_1^c \cup H_2^c)^c$
andererseits: $H_1 \cup H_2 = (H_1^c \cap H_2^c)^c$ □

2.4 Beispiele

Die folgenden Mengensysteme sind Algebren:

(a) $\{\emptyset, X\}$

(b) $\{\emptyset, X, H, H^c\}$, wobei $H \subset X$

(c) $\mathcal{P}(X)$

(d) $\{H \subset X : |\,H\,| < \infty \text{ oder } |\,H^c\,| < \infty\}$

(e) $\mathcal{H}$ sei Algebra über $X, X' \subset X$
$\Longrightarrow \mathcal{H} \cap X' := \{H \cap X' : H \in \mathcal{H}\}$ ist Algebra über X'.

2.5 Satz

$\mathcal{H}_i$ Algebra über $X, i \in I$
$\Longrightarrow \bigcap_{i \in I} \mathcal{H}_i$ Algebra.

2.6 Definition

$\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{P}(X)$, dann:

$$\alpha(\mathcal{H}_0) := \bigcap_{\substack{\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{P}(X) \\ \mathcal{H} \text{ Algebra}}} \mathcal{H} =: \text{ ''von } \mathcal{H}_0 \text{ erzeugte Algebra''}.$$

$\mathcal{H}_0$ heißt "Erzeuger" von $\alpha(\mathcal{H}_0)$.

2.7 Satz

$\emptyset \neq \mathcal{H}_0 \subset \mathcal{P}(X)$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_1 &:= \{H \in \mathcal{P}(X) : H \in \mathcal{H}_0 \text{ oder } H^c \in \mathcal{H}_0\} \\
\mathcal{H}_2 &:= \{H_1 \cap \ldots \cap H_m : m \in \mathbb{N}, H_i \in \mathcal{H}_1 \text{ für } i = 1, \ldots, m\} \\
\mathcal{H}_3 &:= \{D_1 \cup \ldots \cup D_n : n \in \mathbb{N}, D_j \in \mathcal{H}_2 \text{ für } j = 1, \ldots, n \text{ und paarweise disjunkt}\}
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow \mathcal{H}_3 = \alpha(\mathcal{H}_0)$.

Beweis: $\mathcal{H}_3 \subset \alpha(\mathcal{H}_0)$ trivial ($\alpha(\mathcal{H}_0)$ ist Algebra),
z.z.: $\mathcal{H}_3 \supset \alpha(\mathcal{H}_0)$
g.z.z.: $\mathcal{H}_3$ ist Algebra (offenbar gilt $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}_3$).

1. $\mathcal{H}_0 \neq \emptyset \Longrightarrow \exists\, H \in \mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}_1$.
   $\Longrightarrow H, H^c \in \mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_2$
   $\Longrightarrow X = H \cup H^c \in \mathcal{H}_3$

2. $D \in \mathcal{H}_2 \Longrightarrow D = H_1 \cap \ldots \cap H_m$ mit $H_i \in \mathcal{H}_1$
   $$\begin{aligned}
   \Longrightarrow D^c &= H_1^c \cup \ldots \cup H_m^c \\
   &= H_1^c \cup (H_1 \cap H_2^c) \cup (H_1 \cap H_2 \cap H_3^c) \ldots \\
   &\quad \ldots (H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_m^c) \in \mathcal{H}_3
   \end{aligned}$$

3. $D_1, D_2 \in \mathcal{H}_2 \Longrightarrow D_1 \cap D_2 \in \mathcal{H}_2$

4. $V_1, V_2 \in \mathcal{H}_3$, d.h.
   $$\begin{aligned}
   V_1 &= D_{11} \cup \ldots \cup D_{1n_1} \qquad D_{1j_1} \in \mathcal{H}_2, \quad j_1 = 1, \ldots, n_1 \\
   V_2 &= D_{21} \cup \ldots \cup D_{2n_2} \qquad D_{2j_2} \in \mathcal{H}_2, \quad j_2 = 1, \ldots, n_2
   \end{aligned}$$
   $$\Longrightarrow V_1 \cap V_2 = \bigcup_{\substack{j_1 = 1, \ldots, n_1 \\ j_2 = 1, \ldots, n_2}} (D_{1j1} \cap D_{2j2}) \text{ disjunkte Vereinigung}$$
   also $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{H}_3$

5. $V \in \mathcal{H}_3 \Longrightarrow V = D_1 \cup \ldots \cup D_n$ disjunkte Vereinigung
   $\Longrightarrow V^c = D_1^c \cap \ldots \cap D_n^c \in \mathcal{H}_3$ nach 2. und 4.; Satz 2.3 $\Longrightarrow$ Beh.

$\square$

2.8 Definition

$\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ beliebig, dann: $\mathcal{A}\,\sigma$–Algebra (über X) $:\iff$
$(\sigma 1)$ $X \in \mathcal{A}$
$(\sigma 2)$ $A \in \mathcal{A} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{A}$
$(\sigma 3)$ $A_1, A_2 \ldots \in \mathcal{A} \Longrightarrow \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

2.9 Satz

$\mathcal{A}\,\sigma$–Algebra $\iff$ $(\sigma 1), (\sigma 2), (\sigma 3)'$, wobei
$(\sigma 3)'$ $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} \Longrightarrow \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Beweis:

$$\bigcap_n A_n = \left(\bigcup_n A_n^c\right)^c \text{ und } \bigcup_n A_n = \left(\bigcap_n A_n^c\right)^c$$

□

2.10 Beispiele

Die folgenden Mengensysteme sind σ–Algebren:

(a) $\mathcal{A}$ Algebra mit $|\,\mathcal{A}\,| < \infty$
$\Longrightarrow \mathcal{A}\,\sigma$–Algebra

(b) $\mathcal{P}(X)$

(c) $\{A \subset X : A \text{ abzählbar oder } A^c \text{ abzählbar}\}$

2.11 Satz

$\mathcal{A}_i\ \sigma$–Algebra über $X, i \in I$
$\Longrightarrow \bigcap\limits_i \mathcal{A}_i\ \sigma$–Algebra über X.

2.12 Definition

$\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{P}(X)$, dann:
$\sigma(\mathcal{A}_0) := \bigcap\limits_{\substack{\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)\\ \mathcal{A}\,\sigma\text{–Algebra}}} \mathcal{A}$ "von $\mathcal{A}_0$ erzeugte σ–Algebra"
$\mathcal{A}_0$ heißt Erzeuger von $\sigma(\mathcal{A}_0)$

2.13 Definition

$\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt Dynkin–System $:\Longleftrightarrow$

(δ1) $X \in \mathcal{D}$

(δ2) $D, E \in \mathcal{D}, D \subset E \Longrightarrow E \setminus D \in \mathcal{D}$

(δ3) $D_1, D_2, \ldots \in \mathcal{D}$ paarweise disjunkt
$\Longrightarrow \bigcup\limits_n D_n \in \mathcal{D}$

2.14 Beispiele

(a) alle σ–Algebren sind Dynkin–Systeme

(b) $|\, X \,| = 2n, n \in \mathbb{N}$
$\mathcal{D} := \{D \subset X : |\, D \,| = \text{gerade Zahl}\}$ ist Dynkin-System

2.15 Satz

$\mathcal{D}$ Dynkin–System

(δ4) $D \in \mathcal{D} \Longrightarrow D^c \in \mathcal{D}$

(δ5) $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$ und disjunkt $\Longrightarrow D_1 \cup D_2 \in \mathcal{D}$

(δ6) $D_1 \subset D_2 \subset \ldots \in \mathcal{D} \Longrightarrow \bigcup\limits_n D_n \in \mathcal{D}$

(δ7) $D_1 \supset D_2 \supset \ldots \in \mathcal{D} \Longrightarrow \bigcap\limits_n D_n \in \mathcal{D}$

Beweis:

(δ4) $D \in \mathcal{D} \Longrightarrow X \setminus D \in \mathcal{D}$ wegen $(\delta 1), (\delta 2)$

(δ5) $\emptyset = X \setminus X \in \mathcal{D}$
$\Longrightarrow D_1 \cup D_2 = D_1 \cup D_2 \cup \emptyset \cup \emptyset \ldots ; (\delta 3) \Longrightarrow D_1 \cup D_2 \in \mathcal{D}$

(δ6) $\bigcup\limits_n D_n = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{(D_n \setminus D_{n-1})}_{=: D'_n \text{ disjunkt} \in \mathcal{D};} \in \mathcal{D}; D_0 := \emptyset$

(δ7) $D := \bigcap\limits_n D_n = \left(\bigcup\limits_n D_n^c \right)^c \in \mathcal{D}$ nach $(\delta 4), (\delta 6)$,
da $D_n^c \uparrow \bigcup\limits_n D_n^c$

$\square$

2.16 Satz

$\mathcal{D}_i$ Dynkin–System, $i \in I$
$\Longrightarrow \bigcap\limits_{i \in I} \mathcal{D}_i$ ist Dynkin–System

Beweis: Siehe Übungen. $\square$

2.17 Definition

$\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{P}(X)$
$\delta(\mathcal{D}_0) := \bigcap\limits_{\substack{\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X) \\ \mathcal{D} \text{ Dynkin–System}}} \mathcal{D}$ "von $\mathcal{D}_0$ erzeugtes Dynkin–System".

2.18 Satz

$\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ beliebig; dann

$$\mathcal{A}\,\sigma\text{–Algebra} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} \mathcal{A} \text{ Dynkin–System} \\ \text{und } \mathcal{A} \cap\text{–stabil} \end{array}$$

Beweis: "$\Longrightarrow$" trivial

"$\Longleftarrow$" $(\sigma 1) = (\delta 1)$
$(\sigma 2) = (\delta 4)$
$(\sigma 3) : A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$

$$\Longrightarrow \bigcup_n A_n = A_1 \cup (A_1^c \cap A_2) \cup (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3) \cup \ldots \in \mathcal{D} \text{ nach } (\delta 3), (\delta 5)$$

$\square$

2.19 Satz

$\mathcal{D}_0 \cap$–stabil $\Longrightarrow \delta(\mathcal{D}_0) = \sigma(\mathcal{D}_0)$

Beweis: $\delta(\mathcal{D}_0) \subset \sigma(\mathcal{D}_0)$ klar ($\sigma(\mathcal{D}_0)$ ist auch Dynkin–System, das $\mathcal{D}_0$ umfasst)
z.z. "$\supset$"
Dazu genügt es zu zeigen, dass $\delta(\mathcal{D}_0)$ σ–Algebra ist.
Nach 2.18 ist nur noch zu zeigen:
$\delta(\mathcal{D}_0) \cap$–stabil, d.h.

$D \in \delta(\mathcal{D}_0), E \in \delta(\mathcal{D}_0) \Longrightarrow D \cap E \in \delta(\mathcal{D}_0)$
Dazu werde für $D \in \delta(\mathcal{D}_0)$ definiert:

$$\mathcal{D}_D := \{E \in \delta(\mathcal{D}_0) : D \cap E \in \delta(\mathcal{D}_0)\}.$$

Dann gilt:

1. $\mathcal{D}_D$ Dynkin–System, denn
   ($\delta 1$) stets
   ($\delta 2$) $E, F \in \mathcal{D}_D, E \subset F$, d.h. $D \cap E \in \delta(\mathcal{D}_0), D \cap F \in \delta(\mathcal{D}_0)$,
   $F \setminus E \in \delta(\mathcal{D}_0)$
   $\Longrightarrow D \cap (F \setminus E) = [(D \cap F) \setminus (D \cap E)] \in \delta(\mathcal{D}_0)$ nach ($\delta 2$),
   da $(D \cap F) \supset (D \cap E)$
   $\Longrightarrow F \setminus E \in \mathcal{D}_D$
   ($\delta 3$) $D_1, D_2, \ldots \in \delta(\mathcal{D}_0)$ und paarweise disjunkt,
   $D \cap D_n \in \delta(\mathcal{D}_0), n \in \mathbb{N}$
   $\Longrightarrow D \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n \right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (D \cap D_n) \in \delta(\mathcal{D}_0) \Longrightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n \in \mathcal{D}_D.$

2. $D \in \mathcal{D}_0 \Longrightarrow \mathcal{D}_D \supset \mathcal{D}_0$, da $\mathcal{D}_0$ $\cap$–stabil;
   da $\mathcal{D}_D$ Dynkin–System $\Longrightarrow \mathcal{D}_D \supset \delta(\mathcal{D}_0)$
   $\Longrightarrow \mathcal{D}_D = \delta(\mathcal{D}_0)$ da $\mathcal{D}_D \subset \delta(\mathcal{D}_0)$ nach Definition von $\mathcal{D}_D$,
   d.h. $D \in \mathcal{D}_0, E \in \delta(\mathcal{D}_0) \Longrightarrow D \cap E \in \delta(\mathcal{D}_0)$

3. $E \in \delta(\mathcal{D}_0) \Longrightarrow_{2.} \mathcal{D}_E \supset \mathcal{D}_0 \Longrightarrow_{1.} \mathcal{D}_E = \delta(\mathcal{D}_0)$
   ($\mathcal{D}_E \subset \delta(\mathcal{D}_0)$ nach Definition von $\mathcal{D}_E$)
   d.h. $D \in \delta(\mathcal{D}_0), E \in \delta(\mathcal{D}_0) \Longrightarrow D \cap E \in \delta(\mathcal{D}_0)$

$\square$

3 Additive Mengenfunktionen

3.1 Definition

$\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ mit $\emptyset \in \mathcal{A}$;
$\mu : \mathcal{A} \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \cup \{\infty\}$
Dann heißt

(a) $\mu/\mathcal{A}$ additiv $:\Longleftrightarrow\ \mu\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} \mu(A_i)$
für $|\,I\,| < \infty$ und $A_i \in \mathcal{A}$ disjunkt; $\bigcup_i A_i \in \mathcal{A}$

(b) $\mu/\mathcal{A}\,\sigma$–additiv $:\Longleftrightarrow\ \mu\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} \mu(A_i)$
für I abzählbar, $A_i \in \mathcal{A}$ disjunkt; $\bigcup_i A_i \in \mathcal{A}$

(c) $\mu/\mathcal{A}$ Inhalt $:\Longleftrightarrow\ \mu$ additiv und $\mathcal{A}$ Algebra

(d) $\mu/\mathcal{A}$ Prämaß $:\Longleftrightarrow\ \mu\,\sigma$–additiv und $\mathcal{A}$ Algebra

(e) $\mu/\mathcal{A}$ Maß $:\Longleftrightarrow\ \mu\,\sigma$–additiv und $\mathcal{A}\,\sigma$–Algebra

3.2 Beispiel

$X := \mathbb{N}, \mathcal{A} := \{A \subset X : |\,A\,| < \infty$ oder $|\,A^c\,| < \infty\}$
$\mathcal{A}$ Algebra, aber keine σ–Algebra

$$\mu(A) := \begin{cases} 0, & \text{falls} \quad |\,A\,| < \infty \\ 1, & \text{falls} \quad |\,A^c\,| < \infty \end{cases}$$

$\Longrightarrow \mu/\mathcal{A}$ ist Inhalt, aber kein Prämaß $(1 = \mu(\mathbb{N}) \neq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(\{n\}) = 0)$

3.3 Beispiel

$X := \mathbb{R}, \mathcal{A} := \{A \subset \mathbb{R} : A$ abzählbar oder A^c abzählbar$\}$ ist σ–Algebra

$$\mu(A) := \begin{cases} 0, & \text{falls} \quad A \text{ abzählbar} \\ \infty & \text{falls} \quad A^c \text{ abzählbar} \end{cases}$$

$\Rightarrow \mu/\mathcal{A}$ ist Maß

3.4 Beispiel

$\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ σ–Algebra über X, $f : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$ beliebig

$$\mu(A) := \sum_{x \in A} f(x) := \sup_{\substack{D \subset A \\ |D| < \infty}} \sum_{x \in D} f(x)$$

$\Rightarrow \mu/\mathcal{A}$ ist Maß

Beweis: $A := \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$ mit paarweise disjunkten $A_n \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \mu(A) &= \sup_{\substack{B \subset A \\ B \text{ abz.}}} \sum_{x \in B} f(x) \\
= \quad & \sup_{\substack{B_n \subset A_n n \in \mathbb{N} \\ B_n \text{ abz.}}} \sum_{x \in \bigcup\limits_n B_n} f(x) = \sup_{\substack{B_n \subset A_n, n \in \mathbb{N} \\ B_n \text{ abz.}}} \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{x \in B_n} f(x) \\
= \quad & \sum_{n \in \mathbb{N}} \sup_{\substack{B_n \subset A_n \\ B_n \text{ abz.}}} \sum_{x \in B_n} f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)
\end{aligned}$$

$\square$

3.5 Beispiele

(a) $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ σ–Algebra, $B \in \mathcal{A}$ beliebig,
$\mu(A) := |\, A \cap B \,|$ für $A \in \mathcal{A}$
$\Rightarrow \mu/\mathcal{A}$ Maß (zu B gehöriges *Zählmaß*)
(vgl. 3.4 mit $f = 1_B$, siehe 9 in 1.)

(b) $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ σ–Algebra, $x \in X$ fest,

$$\mu(A) := \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad x \in A \\ 0, & \text{falls} \quad x \notin A \end{cases}$$

$\Longrightarrow \mu/\mathcal{A}$ ist Maß (zu $x \in X$ gehöriges *Dirac–Maß* δ_x)
(vgl. 3.4 mit

$$f(y) = \begin{cases} 1 & \text{für } y = x, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad f = 1_{\{x\}})$$

3.6 Beispiel

$\mathcal{A} := \mathcal{P}(X)$,

$$\mu(A) := \begin{cases} 0, & \text{falls} \quad A = \emptyset \\ \infty & \text{sonst} \end{cases} \qquad \Rightarrow \mu/\mathcal{A} \text{ Maß}$$

3.7 Satz

$\mu/\mathcal{A}$ Inhalt, dann gilt:

(a) $\mu(\emptyset) = 0$

(b) $A \subset B, A, B \in \mathcal{A} \Longrightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$ (Monotonie)

(c) $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B), A, B \in \mathcal{A}$ beliebig,

(d) $\mu\left(\bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i\right) \leq \sum_{1 \leq i \leq n} \mu(A_i), A_i \in \mathcal{A}$ (Subadditivität)

(e) $\mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) \geq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i)$, falls $A_1, A_2 \ldots \in \mathcal{A}$ p. d. und $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$

Beweis:

(a) $\emptyset = A_i, i = 1, 2; I = \{1, 2\}$ in 3.1(a): $\mu(\emptyset) = \mu(\emptyset \cup \emptyset) = \mu(\emptyset) + \mu(\emptyset) \Longrightarrow$ $\mu(\emptyset) = 0$.

(c) $A \cup B = A \cup (B \cap A^c)$
$B = (A \cap B) \cup (B \cap A^c)$ disj. Vereinigungen
$\Longrightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B \cap A^c)$
$\quad \mu(B) = \mu(A \cap B) + \mu(B \cap A^c)$
$\Longrightarrow \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B)$
$\quad = \mu(A) + \mu(B \cap A^c) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$

(b) $B = A \cup (B \cap A^c)$
$\Longrightarrow \mu(B) = \mu(A) + \mu(B \cap A^c) \geq \mu(A)$

(d) Es genügt, den Fall $n = 2$ zu beweisen:
$\mu(A_1 \cup A_2) + \mu(A_1 \cap A_2) =_{(c)} \mu(A_1) + \mu(A_2)$
$\Longrightarrow \mu(A_1 \cup A_2) \leq \mu(A_1) + \mu(A_2)$

(e) $\mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) \geq_{(b)} \mu\left(\bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i\right) = \sum_{1 \leq i \leq n} \mu(A_i) \quad \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow_{n \to \infty}$
Behauptung

$\square$

3.8 Satz (Allgemeiner Additionssatz)

$\mu/\mathcal{A}$ Inhalt mit $\mu(X) < \infty$, dann gilt:

$$\begin{aligned}
\mu(A_1 \cup \ldots \cup A_n) &= \mu(A_1) + \mu(A_2) + \ldots + \mu(A_n) \\
&\quad -\mu(A_1 \cap A_2) - \ldots - \mu(A_{n-1} \cap A_n) \\
&\quad +\mu(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \ldots + \mu(A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n) \\
&\quad - + \ldots \\
&\quad (-1)^{n-1} \mu(A_1 \cap \ldots \cap A_n) \\
&= \sum_{\emptyset \neq T \subset \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|T|-1} \mu\left(\bigcap_{i \in T} A_i\right)
\end{aligned}$$

Beweis: Siehe Übungen. □

3.9 Satz

$\mu_n/\mathcal{A}$ Prämaß (Inhalt), $\alpha_n \geq 0\,(n \in \mathbb{N})$
$\Longrightarrow \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n \, \mu_n$ Prämaß (Inhalt) auf $\mathcal{A}$

Beweis: I (abzählbar) endlich, $A_i \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkt und $\bigcup\limits_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad & \mu_n\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} \mu_n(A_i), n \in \mathbb{N} \\
\Longrightarrow \quad & \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n \, \mu_n\right)\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) =_{\text{Def.}} \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n \, \mu_n \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \\
= \quad & \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n \sum_{i \in I} \mu_n(A_i) \\
= \quad & \sum_{i \in I} \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n \, \mu_n(A_i) \\
=_{\text{Def.}} \quad & \sum_{i \in I} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n \, \mu_n\right)(A_i)
\end{aligned}$$

□

3.10 Satz

$\mu/\mathcal{A}$ Inhalt (Prämaß), $X' \in \mathcal{A}$,

$$\mu'(A) := \mu(A \cap X')$$

$\Longrightarrow \mu'/\mathcal{A}$ Inhalt (Prämaß)

Beweis: trivial. □

3.11 Definition

$\mu/\mathcal{A}$ Inhalt, dann:

(a) μ normiert $:\Longleftrightarrow \mu(X) = 1$

(b) μ finit (endlich) $:\Longleftrightarrow \mu(X) < \infty$

(c) $\mu\,\sigma$–finit (σ–endlich) $:\Longleftrightarrow$ es existiert Zerlegung $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ mit disjunkten $X_n \in \mathcal{A}$ und $\mu(X_n) < \infty\,\forall\, n \in \mathbb{N}$

3.12 Satz

$\mu/\mathcal{A}$ Inhalt: Die Aussagen $(a) - (d)$ seien wie folgt definiert:

(a) $\mu\,\sigma$–additiv (d.h. μ Prämaß)

(b) $A_n \uparrow A$ mit $A_n \in \mathcal{A}$ und $A \in \mathcal{A}$
$\Longrightarrow \mu(A_n) \uparrow \mu(A)$ ("σ–Stetigkeit von unten")

(c) $A_n \downarrow A$ mit $A_n \in \mathcal{A}$ und $A \in \mathcal{A}$
und $\mu(A_n) < \infty$
für mindestens ein $n \in \mathbb{N}$
$\Longrightarrow \mu(A_n) \downarrow \mu(A)$ ("σ–Stetigkeit von oben")

(d) $A_n \downarrow \emptyset$ mit $A_n \in \mathcal{A}\,(n \in \mathbb{N})$ und $\mu(A_n) < \infty$
für mindestens ein $n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \mu(A_n) \downarrow 0$

Dann gilt:

$$(a) \iff (b) \Longrightarrow (c) \Longrightarrow (d)$$

Ist μ finit, so gilt die völlige Äquivalenz

Beweis: "$(a) \Longrightarrow (b)$" :
$A_n \uparrow A$ mit $A_n \in \mathcal{A}\,(n \in \mathbb{N})$ und $A \in \mathcal{A}$ (siehe 1.8)
$\Longrightarrow B_n := A_n \setminus A_{n-1} \in \mathcal{A}$ disjunkt, $(A_0 := \emptyset)$,
und $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$
$A_n = B_1 \cup \ldots \cup B_n, \quad n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \mu(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) &= \lim_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \end{aligned}$$

$''(b) \Longrightarrow (a)'':$
$A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}, \quad A_i$ paarweise disjunkt mit $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$
$\Longrightarrow B_n := \bigcup_{1\le i\le n} A_i \in \mathcal{A}$ mit $B_n \uparrow A$
$\Longrightarrow \mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{1\le i\le n} \mu(A_i)$
$= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$

$''(b) \Longrightarrow (c)'':$
$A_n \downarrow A$ mit $A_n \in \mathcal{A}\,(n \in \mathbb{N}), A \in \mathcal{A}$
O.B.d.A. $\mu(A_1) < \infty$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow && (A_1 \setminus A_n) \uparrow (A_1 \setminus A) \text{ mit } (A_1 \setminus A_n), (A_1 \setminus A) \in \mathcal{A}\\
&\Longrightarrow && \mu(A_1 \setminus A_n) \uparrow \mu(A_1 \setminus A)\\
&\Longleftrightarrow && \mu(A_1) - \mu(A_n) \uparrow \mu(A_1) - \mu(A)\\
&\Longrightarrow && \mu(A_n) \downarrow \mu(A)
\end{aligned}$$

$''(c) \Longrightarrow (d)''$: trivial

$''(d) \Longrightarrow (b)''$, falls μ finit:
$A_n \uparrow A$ mit $A_n \in \mathcal{A}\,(n \in \mathbb{N}), A \in \mathcal{A}$
$\Longrightarrow A \setminus A_n \downarrow \emptyset$ mit $(A \setminus A_n) \in \mathcal{A}$
und $\mu(A \setminus A_n) < \infty$

$(d) \Longrightarrow \mu(A \setminus A_n) \downarrow 0 \Longrightarrow \mu(A_n) \uparrow \mu(A)$ $\square$

3.13 Bemerkung

In 3.12 "finit" nicht durch $''\sigma$–finit" ersetzbar. (Vgl. Bsp. 3.2: μ ist σ–finiter Inhalt mit (d), aber nicht (a).)

3.14 Satz

$\mu/\mathcal{A}$ Inhalt, dann:

$$\mu/\mathcal{A} \text{ Prämaß} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} \mu(A) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) \\ \text{für alle } A, A_n \in \mathcal{A} \\ \text{mit } A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \end{array}$$

Beweis: $'' \Longrightarrow ''$

$$\begin{aligned}
B_n \quad &:= \quad A_1^c \cap A_2^c \cap \ldots \cap A_{n-1}^c \cap A_n \cap A, A_0 := \emptyset \\
& \quad\quad B_n \in \mathcal{A} \text{ und paarweise disjunkt}, A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \\
&\Longrightarrow \quad \mu(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)\,(3.7(b))
\end{aligned}$$

$'' \Longleftarrow ''$ mittels 3.7(e) □

3.15 Satz

$\mu/\mathcal{A}$ Inhalt

$\tilde{\mu}(A) := \inf\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) : A_n \in \mathcal{A}, \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \supset A\right\}, \quad A \in \mathcal{A}$

$\Longrightarrow \tilde{\mu}$ größtes Prämaß auf $\mathcal{A}$ mit $\tilde{\mu} \leq \mu$.

Beweis:

(i) Es gilt $\tilde{\mu} \leq \mu \left(\text{da } \tilde{\mu}(A) \leq \mu(A) + \sum_{n=2}^{\infty} \mu(\emptyset)\right)$

(ii) Es sei $\nu \leq \mu$ Prämaß auf $\mathcal{A}$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \nu(A) \quad &\underset{3.14}{\leq} \quad \inf\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(A_n) : A_n \in \mathcal{A} \text{ und } \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \supset A\right\} \\
&\leq \quad \inf\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) : A_n \in \mathcal{A} \cdots\right\} \\
&= \quad \tilde{\mu}(A)
\end{aligned}$$

(iii) Es gilt $\tilde{\mu}(A_1 \cup A_2) \geq \tilde{\mu}(A_1) + \tilde{\mu}(A_2)$ für disjunkte $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$; denn: $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\ B_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}$, mit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \supset A_1 \cup A_2$ und

$$\begin{aligned}
& \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) \leq \tilde{\mu}(A_1 \cup A_2) + \varepsilon \\
\Longrightarrow \quad & \bigcup_n (A_i \cap B_n) \supset A_i \text{ und } \tilde{\mu}(A_i) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_i \cap B_n), \quad i = 1,2 \\
\Longrightarrow \quad & \tilde{\mu}(A_1) + \tilde{\mu}(A_2) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) \leq \tilde{\mu}(A_1 \cup A_2) + \varepsilon \\
\Longrightarrow_{\varepsilon\to 0} \quad & \text{Behauptung.}
\end{aligned}$$

(iv) Es gilt $\tilde{\mu}(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \tilde{\mu}(A_n) \,\forall\, A, A_n \in \mathcal{A}$ mit $A \subset \bigcup_n A_n$, denn:

$$
\begin{aligned}
&\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, B_{nm} \in \mathcal{A}, m \in \mathbb{N} : \bigcup_m B_{nm} \supset A_n \\
&\text{und } \sum_m \mu(B_{nm}) \leq \tilde{\mu}(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \\
\Longrightarrow\quad & \bigcup_{n,m} B_{nm} \supset A \text{ mit } \sum_{n,m} \mu(B_{nm}) \leq \sum_n \tilde{\mu}(A_n) + \varepsilon \\
\Longrightarrow\quad & \tilde{\mu}(A) \leq \sum_n \tilde{\mu}(A_n) + \varepsilon \Longrightarrow_{\varepsilon\to 0} \tilde{\mu}(A) \leq \sum_n \tilde{\mu}(A_n)
\end{aligned}
$$

3.14 $\Longrightarrow \tilde{\mu}$ ist Prämaß $\square$

4 Fortsetzung von Prämaßen

4.1 Definition

$\mu/\mathcal{H}$ Prämaß, setze dann $\mu^* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [\,0,\infty\,]$ mit

$$\mu^*(A) := \inf\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(H_n) : H_n \in \mathcal{H}, n \in \mathbb{N},\ \text{und}\ \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n \supset A\right\}$$

μ^* heißt das zu $\mu/\mathcal{H}$ gehörige "äußere Maß".

4.2 Satz

$\mu/\mathcal{H}$ Prämaß, $\mu^*/\mathcal{P}(X)$ zugehöriges äußeres Maß, dann gilt:

(a) $\mu^*/\mathcal{H} = \mu$ (d.h. μ^* Fortsetzung von μ)

(b) $A_1 \subset A_2$, beliebige Teilmengen von $X \Longrightarrow \mu^*(A_1) \leq \mu^*(A_2)$

(c) $\mu^*\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \leq \sum_{i\in I} \mu^*(A_i)$, falls I abzählbar, $A_i \subset X$ beliebig.

Beweis:

(a) 3.14, 3.15

(b) trivial

(c) wie Beweisteil (iv) zu 3.15: o. B. d. A. $I = \mathbb{N}$
$0 = \mu^*(\emptyset)$, seien $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{P}(X)$. Zu $\varepsilon > 0$ existieren $H_{m,n} \in \mathcal{H}_{m\in\mathbb{N}}$ mit $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} H_{m,n} \supset A_n$ und $\sum_{m\in\mathbb{N}} \mu(H_{m,n}) \leq \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$

$$\Longrightarrow \bigcup_{n,m\in\mathbb{N}} H_{m,n} \supset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \text{ mit}$$

$$\mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{m,n} \mu(H_{m,n}) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n) + \varepsilon \quad \forall\, \varepsilon > 0$$

$\Longrightarrow_{\varepsilon\to 0}$ Behauptung.

□

4.3 Definition

$\mu^* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [\,0,\infty\,]$ sei äußeres Maß, dann ist:

(1) μ^* isoton, d.h. $A_1 \subset A_2 \Longrightarrow \mu^*(A_1) \leq \mu^*(A_2)$

(2) μ^* σ–subadditiv, d.h. $\mu^*\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \leq \sum_{i\in I} \mu^*(A_i)$,
I abzählbar, $A_i \subset X$ beliebig.

Beachte: $\mu^*(\emptyset) = 0$

4.4 Definition

$\mu^*/\mathcal{P}(X)$ äußeres Maß, dann

$$\mathcal{C}(\mu^*) := \{C \subset X : \mu^*(A) = \mu^*(A \cap C) + \mu^*(A \cap C^c) \quad \forall\, A \subset X\}$$

=: Gesamtheit der additiven Zerleger zu μ^*

4.5 Satz (Caratheodory)

$\mu^*/\mathcal{P}(X)$ äußeres Maß zum Prämaß $\mu/\mathcal{H}$,
$\mathcal{C}(\mu^*)$ gemäß 4.4

$\Longrightarrow$(a) $\mathcal{C}(\mu^*) \supset \mathcal{H}$

(b) $\mu^*/\mathcal{C}(\mu^*)$ ist ein Maß

Beweis:

(a) $H \in \mathcal{H}, A \subset X$ beliebig
für beliebige $H_n \in \mathcal{H}$ mit $A \subset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} H_n$ gilt dann
$A \cap H \subset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}(H_n \cap H)$ und $A \cap H^c \subset \bigcup\limits_{n}(H_n \cap H^c)$
also
$\mu^*(A \cap H) \leq \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu(H_n \cap H), \mu^*(A \cap H^c) \leq \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu(H_n \cap H^c),$

$\mu^*(A \cap H) + \mu^*(A \cap H^c) \leq \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu(H_n)$

$\Longrightarrow \mu^*(A) = \inf\left\{\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu(H_n) : H_n \in \mathcal{H}, \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} H_n \supset A\right\}$
$\geq \mu^*(A \cap H) + \mu^*(A \cap H^c)$
$4.2(c) \Longrightarrow \mu^*(A) = \mu^*(A \cap H) + \mu^*(A \cap H^c), \Longrightarrow H \in \mathcal{C}(\mu^*)$

(b_1) $C \in \mathcal{C}(\mu^*) \Longrightarrow C^c \in \mathcal{C}(\mu^*)$

(b_2) $C_1, C_2 \in \mathcal{C}(\mu^*) \Longrightarrow C_1 \cup C_2 \in \mathcal{C}(\mu^*)$

denn: $C_1, C_2 \in \mathcal{C}(\mu^*), A \subset X \Longrightarrow \mu^*(A) = \mu^*(A \cap C_1) + \mu^*(A \cap C_1^c),$

$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap C_2) + \mu^*(A \cap C_2^c)$

$\Longrightarrow \quad \mu^*(A \cap C_1) = \mu^*(A \cap C_1 \cap C_2) + \mu^*(A \cap C_1 \cap C_2^c)$

und $\mu^*(A \cap C_1^c) = \mu^*(A \cap C_1^c \cap C_2) + \mu^*(A \cap C_1^c \cap C_2^c)$

$\Longrightarrow \quad \mu^*(A) = \mu^*(A \cap C_1 \cap C_2) + \mu^*(A \cap C_1 \cap C_2^c)$
$+\mu^*(A \cap C_1^c \cap C_2) + \mu^*(A \cap (C_1 \cup C_2)^c)$

$\Longrightarrow (^*) \mu^*\Big(A \cap (C_1 \cup C_2)\Big) = \mu^*(A \cap C_1 \cap C_2) + \mu^*(A \cap C_1 \cap C_2^c)$
$\quad + \mu^*(A \cap C_1^c \cap C_2)$
$\Longrightarrow \mu^*(A) = \mu^*\Big(A \cap (C_1 \cup C_2)\Big) + \mu^*\Big(A \cap (C_1 \cup C_2)^c\Big)$
$\Longrightarrow C_1 \cup C_2 \in \mathcal{C}(\mu^*)$

(b_3) Seien $C_n \in \mathcal{C}(\mu^*)$ und disjunkt
$\Longrightarrow C := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n \in \mathcal{C}(\mu^*)$ und $\mu^*(C) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(C_n)$,
denn: $C_n \in \mathcal{C}(\mu^*)$ paarweise disjunkt, $A \subset X$ beliebig,
$(^*) \Longrightarrow C_1 \cup C_2 \in \mathcal{C}(\mu^*)$ und

$$\mu^*\Big(A \cap (C_1 \cup C_2)\Big) = \mu^*(A \cap C_1) + \mu^*(A \cap C_2)$$

da $C_1 \cap C_2 = \emptyset$.
Vollständige Induktion $\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : C_1 \cup \ldots \cup C_n \in \mathcal{C}(\mu^*)$ und

$$\mu^*\Big(A \cap (C_1 \cup \ldots \cup C_n)\Big) = \sum_{1\leq i\leq n} \mu^*(A \cap C_i)$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \mu^*(A) &= \mu^*\left(A \cap \bigcup_{1\leq i\leq n} C_i\right) + \mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{1\leq i\leq n} C_i\right)^c\right) \\
&\geq \left(\sum_{1\leq i\leq n} \mu^*(A \cap C_i)\right) + \mu^*(A \cap C^c) \\
\Longrightarrow \mu^*(A) &\geq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A \cap C_n) + \mu^*(A \cap C^c) \\
&\geq \mu^*(A \cap C) + \mu^*(A \cap C^c) \quad \text{vgl. 4.2(c),}
\end{aligned}$$

außerdem

$$\begin{aligned}
4.2(c) \quad \Longrightarrow \quad & \mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap C) + \mu^*(A \cap C^c), \text{ also} \\
& \mu^*(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A \cap C_n) + \mu^*(A \cap C^c)
\end{aligned}$$

Ersetzt man A durch C, so erhält man:

$$\mu^*(C) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(C_n).$$

□

4.6 Satz

$\mu/\mathcal{H}$ Prämaß $\Longrightarrow \mu$ kann zu einem Maß $\tilde{\mu}/\sigma(\mathcal{H})$ fortgesetzt werden.

Beweis: 4.2 und 4.5 $\square$

4.7 Satz

$\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E}), \mathcal{E}\,\cap$–stabil, $\mu_1/\mathcal{A}, \mu_2/\mathcal{A}$ Maße mit $\mu_1(E) = \mu_2(E) \ \ \forall\, E \in \mathcal{E}$;
es existiere $E_n \in \mathcal{E}, n \in \mathbb{N}$, mit $\mu_1(E_n) = \mu_2(E_n) < \infty$ und $E_n \uparrow X$
$\Longrightarrow \mu_1 = \mu_2$.

Beweis:
$\mathcal{D}_n := \{D \in \mathcal{A} : \mu_1(E_n \cap D) = \mu_2(E_n \cap D)\} \quad (n \in \mathbb{N})$
$\Longrightarrow$ (1) $\mathcal{D}_n \supset \mathcal{E}$ ($\mathcal{E}\cap$–stabil)
(2) $\mathcal{D}_n$ Dynkin–System, denn:
(δ1): trivial
$(\delta 2) : D \subset E, D, E \in \mathcal{D}_n$

$$\Longrightarrow \mu_1\Big(E_n \cap (E \setminus D)\Big) = \mu_1\Big((E_n \cap E) \setminus (E_n \cap D)\Big)$$
$$= \mu_1(E_n \cap E) - \mu_1(E_n \cap D)$$
$$(D, E \in \mathcal{D}_n) = \mu_2(E_n \cap E) - \mu_2(E_n \cap D)$$
$$= \mu_2\Big(E_n \cap (E \setminus D)\Big)$$

$(\delta 3) : D_m \in \mathcal{D}_n (m \in \mathbb{N})$ paarweise disjunkt

$$\Longrightarrow \mu_1\left(E_n \cap \bigcup_{m\in\mathbb{N}} D_m\right) = \sum_{m\in\mathbb{N}} \mu_1(E_n \cap D_m)$$
$$= \sum_{m\in\mathbb{N}} \mu_2(E_n \cap D_m)$$
$$= \mu_2\left(E_n \cap \bigcup_{m\in\mathbb{N}} D_m\right)$$

$$\Longrightarrow \bigcup_{m\in\mathbb{N}} D_m \in \mathcal{D}_n$$

$$
\begin{aligned}
(1),(2) \Longrightarrow \mathcal{D}_n \supset \delta(\mathcal{E}) =_{2.19} \sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{A}, \text{ d.h. } \mathcal{D}_n = \mathcal{A}\\
\text{d.h. } \mu_1(E_n \cap A) = \mu_2(E_n \cap A) \quad \forall\, A \in \mathcal{A}\\
\Longrightarrow \mu_1(A) = \mu_2(A) \quad \forall\, A \in \mathcal{A}, \text{ da } E_n \cap A \uparrow A \text{ (s. 3.12(b))}.
\end{aligned}
$$

□

4.8 Beispiel

$X := \mathbb{R}, \mathcal{E} := \{\, [\, a, b) : -\infty < a \le b < +\infty\}$
$D_1, D_2 \subset \mathbb{R}$ abzählbar, dicht, $D_1 \neq D_2$
$\mu_i(A) := |\, A \cap D_i \,|$ für $A \in \mathcal{A} := \sigma(\mathcal{E})$ und $i = 1, 2$

$$\mu_i([\, a, b)) = \begin{cases} \infty, & \text{falls } \;[\, a, b) \neq \emptyset \\ 0, & \text{falls } \; a = b \end{cases}$$

d.h. $\mu_1/\mathcal{E} = \mu_2/\mathcal{E}$
$\{x\} = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \left[x, x + \frac{1}{n} \right) \in \mathcal{A} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

$$\mu_i(\{x\}) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \; x \in D_i, \\ 0, & \text{falls } \; x \notin D_i, \end{cases} \quad \text{d.h. } \mu_1/\mathcal{A} \neq \mu_2/\mathcal{A}, \text{da } D_1 \neq D_2.$$

4.9 Satz

$\nu/\mathcal{H}\, \sigma$–finites Prämaß, $\mathcal{A} := \sigma(\mathcal{H})$
$\Longrightarrow\ \exists\,!$ Fortsetzung von $\nu/\mathcal{H}$ zu einem Maß $\mu/\mathcal{A}$.

Beweis: 4.6 und 4.7 □

4.10 Definition

$\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ beliebig; dann:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_\sigma &:= \left\{ \bigcup_{i\in I} E_i : I \text{ abzählbar}, E_i \in \mathcal{E} \text{ für } i \in I \right\}\\
\mathcal{E}_\delta &:= \left\{ \bigcap_{i\in I} E_i : I \text{ abzählbar}, E_i \in \mathcal{E} \text{ für } i \in I \right\}
\end{aligned}
$$

4.11 Satz

$\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ beliebig; dann:
(1) $\mathcal{E}_{\sigma\,\sigma} := \left(\mathcal{E}_\sigma\right)_\sigma = \mathcal{E}_\sigma, \mathcal{E}_{\delta\,\delta} := \left(\mathcal{E}_\delta\right)_\delta = \mathcal{E}_\delta$

(2) $\mathcal{E} \subset \begin{matrix} \mathcal{E}_\sigma \\ \mathcal{E}_\delta \end{matrix} \subset \begin{matrix} \mathcal{E}_{\sigma\,\delta} \\ \mathcal{E}_{\delta\,\sigma} \end{matrix} \subset \begin{matrix} \mathcal{E}_{\sigma\,\delta\,\sigma} \\ \mathcal{E}_{\delta\,\sigma\,\delta} \end{matrix} \subset \ldots$

4.12 Satz

$\nu/\mathcal{H}\,\sigma$–finites Prämaß, $\mu/\mathcal{A}$ (eindeutige) Fortsetzung gemäß 4.9, dann gilt: zu jedem $A \in \mathcal{A}$ und jedem $\varepsilon > 0$ existieren $F \in \mathcal{H}_\delta$ und $G \in \mathcal{H}_\sigma$ mit $F \subset A \subset G$ und $\mu(G \setminus F) \leq \varepsilon$.

Beweis: Sei $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ mit disjunkten $X_n \in \mathcal{H}$ und $\mu(X_n) < \infty$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow\quad & \exists\, H_{m,n} \in \mathcal{H} \text{ mit } \bigcup_{m\in\mathbb{N}} H_{m,n} \supset A \cap X_n \text{ und} \\
& \underset{\displaystyle \nu}{\underset{\|}{\sum_{m\in\mathbb{N}} \mu}}(H_{m,n}) < \mu(A \cap X_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}
\end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{denn: } \mu(A) \text{ Fortsetzung von } \nu \text{ gemäß 4.9} \\[1em] \qquad \nu(A) = \mu^*(A) = \inf\left\{ \sum_{m\in\mathbb{N}} \nu(H_m) : H_m \in \mathcal{H}, \bigcup_{m\in\mathbb{N}} H_m \supset A \right\} \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow\quad & G := \bigcup_{m,n} \underbrace{(H_{m,n} \cap X_n)}_{\in\mathcal{H}} \in \mathcal{H}_\sigma, \quad G \supset A \\
\text{und}\quad & \mu(G \setminus A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu\left(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} (H_{m,n} \cap X_n) \setminus A \cap X_n \right) \\
\leq\quad & \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\left(\sum_{m\in\mathbb{N}} \mu(H_{m,n} \cap X_n) \right) - \mu(A \cap X_n) \right) \\
\leq\quad & \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\left(\sum_{m\in\mathbb{N}} \mu(H_{m,n}) \right) - \mu(A \cap X_n) \right) \\
\leq\quad & \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

Zu $A^c\ \exists\, G' \in \mathcal{H}_\sigma, G' \supset A^c : \mu(G' \setminus A^c) \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$;

$F := {G'}^c \in \mathcal{H}_\delta$, denn $\underset{\displaystyle \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n}{\underset{\|}{G'}} \in \mathcal{H}_\sigma \iff \underset{\displaystyle \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{H_n^c}_{\in\mathcal{H}}}{\underset{\|}{{G'}^c}} \in \mathcal{H}_\delta$

$F \subset A, \mu(A \setminus F) \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$
denn:

$$\begin{aligned}&\mu(A \setminus F)\\&= \mu(F^c \setminus A^c)\\&= \mu(G' \setminus A^c) \leq \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

und somit:

$$\begin{aligned}\mu(G \setminus F) &= \mu\Big((G \setminus A) \cup (A \setminus F)\Big)\\&\leq \mu(G \setminus A) + \mu(A \setminus F)\\&\leq \varepsilon.\end{aligned}$$

□

4.13 Satz

Voraussetzung von 4.12, dann gilt:
$\forall\, A \in \mathcal{A}\, \exists\, F_\sigma \in \mathcal{H}_{\delta\,\sigma}\, \exists\, G_\delta \in \mathcal{H}_{\sigma\,\delta} : F_\sigma \subset A \subset G_\delta$ und $\mu(G_\delta \setminus F_\sigma) = 0$

Beweis: F_n und G_n gemäß 4.12 zu $\varepsilon = 1/n$,
$F_n \in \mathcal{H}_\delta, G_n \in \mathcal{H}_\sigma, F_n \subset A \subset G_n$,
$\mu(G_n \setminus F_n) \leq \dfrac{1}{n}$.
Setze $F_\sigma := \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n, G_\delta := \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} G_n$,
damit gilt: $F_n \subset F_\sigma \subset A \subset G_\delta \subset G_n, n \in \mathbb{N}$, und somit
$\mu(G_\delta \setminus F_\sigma) \leq \mu(G_n \setminus F_n) \leq \dfrac{1}{n} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \Longrightarrow$ Behauptung. □

4.14 Satz

$\nu/\mathcal{H}$ **finites** Prämaß, $\mu/\mathcal{A}$ Fortsetzung gemäß 4.9, dann gilt:
$\forall\, A \in \mathcal{A}\, \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, H \in \mathcal{H} : \mu(A \triangle H) < \varepsilon$.

Beweis:

(1) nach 4.12 $\exists\, H_n \in \mathcal{H}, n \in \mathbb{N} : \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} H_n \supset A$ und $\mu\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} H_n\right)$
$-\mu(A) < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

(2) $\bigcup\limits_{n\leq m} H_n \uparrow \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} H_n$, also (3.12(b)):

$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n\right) - \mu\left(\bigcup_{n\leq m} H_n\right) < \frac{\varepsilon}{2}$ für geeignetes $m \in \mathbb{N}$,
mit $H := \bigcup_{n\leq m} H_n \Longrightarrow_{(1)}$ Behauptung. □

4.12* Satz

$\nu/\mathcal{H}\,\sigma$–finites Prämaß, $\mu^*/\mathcal{C}(\mu^*)$ gemäß 4.5
$\Longrightarrow \forall\, C \in \mathcal{C}(\mu^*)\,\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, F \in \mathcal{H}_\delta\ \exists\, G \in \mathcal{H}_\sigma : F \subset C \subset G$ und $\mu^*(G \setminus F) < \varepsilon$.

Beweis: Sei $C \in \mathcal{C}(\mu^*), \varepsilon > 0$. $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ mit disjunkten $X_n \in \mathcal{H}$ und $\nu(X_n) < \infty$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow\quad & \exists\, H_{m,n} \in \mathcal{H} : X_n \supset \bigcup_{m\in\mathbb{N}} H_{m,n} \supset C \cap X_n \text{ und} \\
& \sum_{m\in\mathbb{N}} \nu(H_{m,n}) < \mu^*(C \cap X_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \\
\Longrightarrow\quad & G := \bigcup_{m,n\in\mathbb{N}} H_{m,n} \in \mathcal{H}_\sigma, G \supset C, \\
& \mu^*(G \setminus C) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\mu^* \underbrace{(G \cap X_n)}_{\substack{=\bigcup_{m\in\mathbb{N}} H_{m,n} \text{ da } X_n \\ \text{paarweise disjunkt}}} - \mu^*(C \cap X_n)\right), \\
\leq\quad & \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{m\in\mathbb{N}} \nu(H_{m,n}) - \mu^*(C \cap X_n)\right) < \frac{\varepsilon}{2} \Longrightarrow \text{ Behauptung.}
\end{aligned}$$

□

4.13* Satz

$\nu/\mathcal{H}\,\sigma$–finites Prämaß, $\mu^*/\mathcal{C}(\mu^*)$ gemäß 4.5

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow\quad & \forall\, C \in \mathcal{C}(\mu^*)\ \exists\, F_\sigma \in \mathcal{H}_{\delta\,\sigma}\ \exists\, G \in \mathcal{H}_{\sigma\,\delta} : \\
& F_\sigma \subset C \subset G_\delta \text{ und } \mu^*(G_\delta \setminus F_\sigma) = 0
\end{aligned}$$

4.14* Satz

$\nu/\mathcal{H}$ finites Prämaß, $\mu^*/\mathcal{C}(\mu^*)$ gemäß 4.5
$\Longrightarrow \forall\, C \in \mathcal{C}(\mu^*)\,\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, H \in \mathcal{H} : \mu^*(H \triangle C) < \varepsilon$.

4.15 Beispiel

$X := \mathbb{N}$,
$\mathcal{H} := \{H \subset \mathbb{N} : |\,H\,| < \infty \text{ oder } |\,H^c\,| < \infty\}$
$\nu(H) := |\,H\,|$
$\Longrightarrow \mathcal{C}(\mu^*) = \mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N}), \nu^*(A) = |\,A\,|$
$\mu^*(A \triangle H) = \infty$, falls $A \notin \mathcal{H}, H \in \mathcal{H}$
d.h. finit in 4.14 nicht durch σ–finit ersetzbar.

$$[\,|\,A \triangle H\,| = |\,A \setminus H\,| + |\,H \setminus A\,| = |\,A^c \cap H^c\,| + |\,H \cap A^c\,| = \infty\,].$$

4.16 Definition

$X \neq \emptyset, \mathcal{A}\,\sigma$–Algebra über $X, \mu/\mathcal{A}$ Maß. Dann heißt $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum.
$(X, \mathcal{A}, \mu)$ sei Maßraum, dann:

(a)

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\mu) &:= \{T \subset X : \exists\, N \in \mathcal{A}, T \subset N : \mu(N) = 0\} \\ &= \text{Gesamtheit der } \mu\text{–Nullmengen} \end{aligned}$$

(b) $(X, \mathcal{A}, \mu)$ vollständig $:\Longleftrightarrow \mathcal{N}(\mu) \subset \mathcal{A}$
μ heißt dann auch vollständig.

4.17 Theorem

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum:

$$\mathcal{A}_\mu := \sigma\Big(\mathcal{A} \cup \mathcal{N}(\mu)\Big)$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow\quad &(a)\ \mathcal{A}_\mu = \{A \cup T : A \in \mathcal{A}, T \in \mathcal{N}(\mu)\} \\ &(b)\ \exists\,!\ \text{Fortsetzung von } \mu/\mathcal{A} \text{ zu einem Maß } \tilde{\mu}/\mathcal{A}_\mu \\ &(c)\ \tilde{\mu}/\mathcal{A}_\mu \text{ vollständig.} \end{aligned}$$

Beweis:

(a) Zu zeigen: $\mathcal{A}^* := \{A \cup T : A \in \mathcal{A}, T \in \mathcal{N}(\mu)\}$ ist σ–Algebra. Offenbar: $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}^* \subset \mathcal{A}_\mu$.

(1) $X \in \mathcal{A}^*$ $(X \in \mathcal{A} \subset \mathcal{A}^*)$

(2) Sei $A \cup T \in \mathcal{A}^*$, d.h. $\exists\, N \in \mathcal{A} : \mu(N) = 0, T \subset N$
$\Longrightarrow (A \cup T)^c = \underbrace{(A \cup N)^c}_{\in \mathcal{A}} \cup \underbrace{(N \setminus T)}_{\in \mathcal{N}(\mu)} \in \mathcal{A}^*$

(3) Sei $A_n \cup T_n \in \mathcal{A}^*, n \in \mathbb{N}$,

$$\Longrightarrow \bigcup_n (A_n \cup T_n) = \underbrace{\left(\bigcup_n A_n\right)}_{\in \mathcal{A}} \cup \underbrace{\left(\bigcup_n T_n\right)}_{\in \mathcal{N}(\mu)} \in \mathcal{A}^*$$

$\Longrightarrow \mathcal{A}^*$ σ–Algebra

(b) $\tilde{\mu}/\mathcal{A}$ Fortsetzung von $\mu/\mathcal{A} \Longrightarrow \tilde{\mu}(A \cup T) = \mu(A), A \cup T \in \mathcal{A}^*$, denn:

$$\begin{array}{l} A \subset A \cup T \subset A \cup N, \\ \tilde{\mu}(A) \leq \tilde{\mu}(A \cup T) \leq \tilde{\mu}(A \cup N) \\ \quad \| \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \| \\ \mu(A) \qquad\qquad\qquad\quad \mu(A) \end{array}$$

Definiere $\tilde{\mu}(A \cup T) := \mu(A)$ für $A \cup T \in \mathcal{A}_\mu$. $\tilde{\mu}/\mathcal{A}_\mu$ ist wohldefiniert:

$$\begin{array}{rl} & A_1 \cup T_1 = A_2 \cup T_2 \text{ mit } A_1, A_2 \in \mathcal{A}, \\ & T_1 \subset N_1, T_2 \subset N_2, N_1, N_2 \in \mathcal{A}, \mu(N_1) = \mu(N_2) = 0 \\ \Longrightarrow & A_1 \cap A_2 \subset A_i \subset (A_1 \cup T_1) \cap (A_2 \cup T_2) \\ & \qquad \subset (A_1 \cap A_2) \cup (N_1 \cup N_2), \quad i = 1, 2 \\ \Longrightarrow & \mu(A_1 \cap A_2) \leq \mu(A_i) \leq \mu(A_1 \cap A_2) \quad i = 1, 2 \\ \Longrightarrow & \mu(A_1) = \mu(A_2). \end{array}$$

$\tilde{\mu}$ ist σ–additiv, denn: $A_n \cup T_n \in \mathcal{A}_\mu, n \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \tilde{\mu}\left(\bigcup_n (A_n \cup T_n)\right) &= \tilde{\mu}\left(\underbrace{\left(\bigcup_n A_n\right)}_{\in \mathcal{A}} \cup \underbrace{\left(\bigcup_u T_u\right)}_{\in \mathcal{N}(\mu)}\right) \\ &= \mu\left(\bigcup_u A_u\right) = \sum_n \mu(A_n) = \sum_n \tilde{\mu}(A_n \cup T_n). \end{aligned}$$

(c) $\tilde{\mu}/\mathcal{A}$ ist vollständig, denn: Sei $\tilde{T} \subset \tilde{N}$ mit $\tilde{N} \in \mathcal{A}_\mu$. $\tilde{\mu}(\tilde{N}) = 0$

$$\begin{array}{rl} \Longrightarrow & \tilde{N} = A \cup T, T \subset N \text{ mit } \mu(A) = \tilde{\mu}(\tilde{N}) = 0 = \mu(N), \\ & \tilde{T} = \emptyset \cup \tilde{T}, \tilde{T} \subset A \cup N \in \mathcal{A}, \mu(A \cup N) = 0 \\ \Longrightarrow & \tilde{T} \in \mathcal{A}_\mu. \end{array}$$

□

4.18 Definition

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum
$\tilde{\mu}/\mathcal{A}_\mu$ gemäß 4.17, dann heißt

$$\begin{array}{rl} (X, \mathcal{A}_\mu, \tilde{\mu}) & \text{Vervollständigung von } (X, \mathcal{A}, \mu), \\ \tilde{\mu} & \text{Vervollständigung von } \mu, \\ \mathcal{A}_\mu & \text{Vervollständigung von } \mathcal{A}. \end{array}$$

4.19 Satz

$\nu/\mathcal{H}$ σ–finites Prämaß
$\mu/\mathcal{A}$ eindeutige Fortsetzung gemäß 4.9
$\mu^*/\mathcal{C}(\mu^*)$ Fortsetzung gemäß 4.5

$\Longrightarrow \mu^*/\mathcal{C}(\mu^*)$ Vervollständigung von $\mu/\mathcal{A}$

Beweis:

(1) $\mu^*/\mathcal{C}(\mu^*)$ ist vollständig:
$T \subset N \in \mathcal{C}(\mu^*), \mu^*(N) = 0, A \subset X$
$\Longrightarrow \mu^*(A) = \mu^* \underbrace{(A \cap N)}_{\overset{\|}{0}} + \mu^*(A \cap N^c)$
$\Longrightarrow \mu^*(A) = \mu^* \underbrace{(A \cap T)}_{\overset{\|}{0}} + \mu^*(A \cap T^c)$
$\Big($ denn: $A \cap N^c \subset A \cap T^c \subset A$
$\Longrightarrow \mu^*(A \cap N^c) \leq \mu^*(A \cap T^c) \leq \mu^*(A) = \mu^*(A \cap N^c)\Big)$
$\Longrightarrow T \in \mathcal{C}(\mu^*)$.

(2) Sei $C \in \mathcal{C}(\mu^*)$

$$\begin{array}{rcl} 4.13^* & \Longrightarrow & \exists\, F_\sigma \subset C \subset G_\delta \text{ mit: } F_\sigma, G_\delta \in \mathcal{A} \\ & & \mu^*(G_\delta \setminus F_\sigma) = 0 \\ & \text{d.h.} & C = F_\sigma \cup (C \setminus F_\sigma) \in \mathcal{A}_\mu \\ & & \text{da } C \setminus F_\sigma \subset G_\delta \setminus F_\sigma \text{ und } \mu^*(G_\delta \setminus F_\sigma) = 0 = \mu(G_\delta \setminus F_\sigma). \end{array}$$

5 Borel–Mengen und Lebesgue–Maß

5.1 Definition

$a = (a_1, \dots, a_d), b = (b_1, \dots, b_d) \in \bar{\mathbb{R}}^d$, $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ dann

(a) $a < b :\iff a_k < b_k \quad \forall\, k = 1, \dots, d$
$a \leq b :\iff a_k \leq b_k \quad \forall\, k = 1, \dots, d$
(Beachte: $a < b \;\not\Longleftrightarrow\; a \leq b$ und $a \neq b$)

(b)

$$
\begin{aligned}
[\,a, b\,] &:= \Big\{x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : a \leq x \leq b\Big\} \\
[\,a, b) &:= \Big\{x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : a \leq x < b\Big\} \\
(a, b\,] &:= \Big\{x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : a < x \leq b\Big\} \\
(a, b) &:= \Big\{x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : a < x < b\Big\}
\end{aligned}
$$

Bemerkung: Somit $[\,a, b\,] \subset \mathbb{R}^d$ auch für $a = (-\infty, \dots, -\infty), b = (+\infty, \dots, +\infty)$;
$[\,a, b\,] = [\,a, b) = (a, b\,] = (a, b) = \emptyset$ falls $a \not\leq b$
$[\,a, b\,) = (a, b\,] = (a, b) = \emptyset$ falls $a \not< b$

5.2 Definition

$\mathcal{I}_d := \{[\,a, b) \subset \mathbb{R}^d : a, b \in \bar{\mathbb{R}}^d\}, \quad \mathcal{I} := \mathcal{I}_1$

5.3 Satz

(a) $\mathcal{I}_d\, \cap$–stabil

(b) $\alpha(\mathcal{I}_d) = \left\{ \bigcup\limits_{1 \leq j \leq n} I_j, n \in \mathbb{N}, I_j \in \mathcal{I}_d \text{ für } j = 1, \dots, n \text{ und disjunkt} \right\}$

Beweis:

(a) trivial

(b) Zu zeigen ist: $\mathcal{H} := \left\{ \bigcup\limits_{1 \leq j \leq n} I_j, n \in \mathbb{N}, I_j \in \mathcal{I}_d \text{ für } j = 1, \dots, n \text{ und disjunkt} \right\}$
ist Algebra:

(1) $\mathbb{R}^d = [\,(-\infty, \dots, -\infty), (\infty, \dots, \infty)) \in \mathcal{H}$,

(2) $A := \bigcup_j I_j, B := \bigcup_k I'_k \in \mathcal{H} \Longrightarrow A \cap B = \bigcup_{j,k} (I_j \cap I'_k) \in \mathcal{H}$
wegen (a)

(3) $[\,a, b) \in \mathcal{I}_d \Longrightarrow [\,a, b)^c \in \mathcal{H}$

$\bigcup_j I_j \in \mathcal{H} \Longrightarrow \left(\bigcup_j I_j\right) = \bigcap_j I_j^c \in \mathcal{H}$ □

5.4 Definition

$\mathcal{B}_d := \sigma(\mathcal{I}_d) = \sigma$–Algebra der Borelschen Teilmengen des $\mathbb{R}^d$.

5.5 Definition

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_d^0 &:= \{(-\infty, b) : b \in \bar{\mathbb{R}}^d\} \\
\mathcal{G}_d &:= \{G \subset \mathbb{R}^d : G \text{ offen}\} \\
\mathcal{F}_d &:= \{F \subset \mathbb{R}^d : F \text{ abgeschlossen}\} \\
\mathcal{K}_d &:= \{K \subset \mathbb{R}^d : K \text{ kompakt}\}
\end{aligned}$$

5.6 Satz

$\mathcal{B}_d \;=_{(1)}\; \sigma(\mathcal{I}_d^0) \;=_{(2)}\; \sigma(\mathcal{G}_d) \;=_{(3)}\; \sigma(\mathcal{F}_d) \;=_{(4)}\; \sigma(\mathcal{K}_d)$

Beweis:

(1) $\mathcal{I}_d^0 \subset \mathcal{I}_d \subset \sigma(\mathcal{I}_d^0) \quad \Big(\Longrightarrow \sigma(\mathcal{I}_d^0) = \sigma(\mathcal{I}_d)\Big)$
denn: $[a, b) = \bigcap_{1 \le k \le d} \{x \in \mathbb{R}^d : a_k \le x_k < b_k\}$
$= \bigcap_{1 \le k \le d} \Big(\{x \in \mathbb{R}^d : x_k < b_k\} \cap \{x \in \mathbb{R}^d : x_k < a_k\}^c\Big) \in \sigma(\mathcal{I}_d^0)$

(2) $\mathcal{I}_d^0 \subset \mathcal{G}_d \subset \sigma(\mathcal{I}_d^0) \quad \Big(\Longrightarrow \sigma(\mathcal{I}_d^0) = \sigma(\mathcal{G}_d)\Big)$
denn: $\mathcal{G}_d \ni G = \bigcup_{\substack{[\,a,b) \subset G \\ a,b \in \mathbb{Q}^d}} [\,a, b) \in \sigma(\mathcal{I}_d) =_{(1)} \sigma(\mathcal{I}_d^0)$

(3) $\sigma(\mathcal{G}_d) = \sigma(\mathcal{F}_d)$
denn: $G \in \mathcal{G}_d \iff G^c \in \mathcal{F}_d$

(4) $\mathcal{K}_d \subset \mathcal{F}_d \subset \sigma(\mathcal{K}_d) \quad \Big(\Longrightarrow \sigma(\mathcal{K}_d) = \sigma(\mathcal{F}_d)\Big)$
denn: $F \in \mathcal{F}_d \Longrightarrow F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (F \cap \{x \in \mathbb{R}^d : |\,x\,| \le n\}) \in \sigma(\mathcal{K}_d)$
(Satz von Heine–Borel).

$\square$

5.7 Definition

$\lambda'_d : \mathcal{I}_d \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$ mit:

$$\lambda'_d([\,a,b)) := \begin{cases} \prod\limits_{1\le k\le d} (b_k - a_k) & \text{falls } a < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{"}d\text{–dimensionales Elementarvolumen"}$$

5.8 Satz

λ'_d ist additiv.

Beweis:

(1) Additivität von λ'_d bei einer Zerlegung $I = [\,a,b) = I_1 \cup I_2$ mittels einer Hyperebene:

$$\begin{array}{rcl} \text{Es sei } a_j < c < b_j & & \text{für ein } j \\ \Longrightarrow I = [\,a,b) & = & [a,b') \cup [\,a',b) \\ \text{mit } b' & = & (b_1,\ldots,b_{j-1},c,b_{j+1},\ldots,b_d) \\ a' & = & (a_1,\ldots,a_{j-1},c,a_{j+1},\ldots,a_d) \\ \text{Dann gilt:} & & \\ \lambda'_d([\,a,b)) & = & \prod\limits_k (b_k - a_k) \\ \lambda'_d([\,a,b')) & = & (c-a_j)\prod\limits_{k\ne j}(b_k - a_k) \\ \lambda'_d([\,a',b)) & = & (b_j - c)\prod\limits_{k\ne j}(b_k - a_k) \\ \Longrightarrow \lambda'_d([\,a,b)) & = & \lambda'_d([\,a,b')) + \lambda'_d([\,a',b)) \end{array}$$

Vollständige Induktion $\Longrightarrow$ (2) Additivität von λ'_d bei einer Zerlegung $I = I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_m$ eines $I \in \mathcal{I}_d$ mittels endlich vieler Hyperebenen.

(3) Additivität von λ'_d bei beliebiger disjunkter Zerlegung von $I = I^1 \cup \ldots \cup I^m$ mit $I, I^k \in \mathcal{I}_d$:

$$\begin{array}{rcl} I^k = [\,a^k, b^k) \text{ mit } a^k & = & (a_1^k, \ldots, a_d^k), \\ b^k & = & (b_1^k, \ldots, b_d^k). \end{array}$$

Schneide I mit allen Hyperebenen der Gestalt $x_j = a_j^k$ falls $a_j < a_j^k < b_j, I = [\,a,b)$, und der Gestalt $x_j = b_j^k$, falls $a_j < b_j^k < b_j$. Dadurch zerfällt I in endlich viele disjunkte Intervalle $I_1, \ldots, I_r \in \mathcal{I}_d$, wobei zugleich jedes I^k in gewisse der Intervalle $I_1, \ldots, I_R$ zerlegt wird.

(2) $\Longrightarrow$ Behauptung:

$$\begin{aligned}\lambda_d'(I) &= \lambda_d'(I_1) + \ldots + \lambda_d'(I_r) \\ &= \lambda_d'(I^1) + \ldots + \lambda_d'(I^m).\end{aligned}$$

□

5.9 Satz

$\exists!$ Inhalt $\lambda_d'' : \alpha(\mathcal{I}_d) \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$ mit $\lambda_d''/\mathcal{I}_d = \lambda_d'$.

Beweis: Setze

$$\lambda_d''\left(\bigcup_{1\le j\le n} I_j\right) := \sum_{j=1}^n \lambda_d'(I_j)$$

falls $I_j \in \mathcal{I}_d$ paarweise disjunkt.

(1) Definition eindeutig, denn:

$$\begin{aligned}\bigcup_{1\le j\le n} I_j &= \bigcup_{1\le i\le m} I_i' \text{ mit disjunkten } I_j \text{ bzw. } I_i' \in \mathcal{I}_d \\ \Longrightarrow I_j &= \bigcup_i (I_j \cap I_i') \,\forall\, j \\ I_i' &= \bigcup_j (I_j \cap I_i') \,\forall\, i \\ 5.8 \Longrightarrow \quad & \lambda_d'(I_j) = \sum_i \lambda_d'(I_j \cap I_i') \\ \lambda_d'(I_i') &= \sum_j \lambda_d'(I_j \cap I_i') \\ \Longrightarrow \sum_j \lambda_d'(I_j) &= \sum_j \sum_i \lambda_d'(I_j \cap I_i') \\ &= \sum_i \sum_j \lambda_d'(I_j \cap I_i') = \sum_i \lambda_d'(I_i)\end{aligned}$$

(2) λ_d'' ist offenbar additiv.

(3) Eindeutigkeit ist klar:

$$\tilde{\lambda}\left(\bigcup_{1\le j\le n} I_j\right) = \sum_{j=1}^n \tilde{\lambda}(I_j) = \sum_{j=1}^n \lambda_d'(I_j) = \lambda_d''\left(\bigcup_{1\le j\le n} I_j\right).$$

□

5.10 Satz

$\lambda_d''/\alpha(\mathcal{I}_d)$ ist ein σ–finites Prämaß

Beweis:

(1) $A_n := \Big[(-n,-n,\ldots,-n),(n,n,\ldots,n)\Big), \quad n \in \mathbb{N} \Longrightarrow A_n \in \mathcal{I}_d$,
$A_n \uparrow \mathbb{R}^d$,
$\lambda_d''(A_n) = (2n)^d < \infty \,\forall\, n$
$\Longrightarrow \lambda_d''\, \sigma$–finit

(2) $[\,a,b) = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} [\,a^n,b^n)$ mit disjunkten $[\,a^n,b^n) \in \mathcal{I}_d$; o. B. d. A.
$a^n \leq b^n, \quad n \in \mathbb{N}$ (sonst $\emptyset$)
$\Longrightarrow [\,\bar a,\bar b\,] \subset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} [\,a^n,b^n) \subset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (\bar a^n,b^n)$ für alle kompakten
$[\,\bar a,\bar b\,] \subset [\,a,b)$ und offenen Intervalle $(\bar a^n,b^n) \supset [\,a^n,b^n)$
$\Longrightarrow [\,\bar a,\bar b\,] \subset \bigcup\limits_{n\leq N} (\bar a^n,b^n)$ für geeignetes $N \in \mathbb{N}$ $\quad$ ($[\,\bar a,\bar b\,]$ kompakt!)
$\Longrightarrow [\,\bar a,\bar b) \subset \bigcup\limits_{n\leq \mathbb{N}} [\,\bar a^n,b^n)$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \lambda_d'([\,\bar a,\bar b)) &\leq \lambda_d''\left(\bigcup_{n\leq N} [\,\bar a^n,b^n)\right) \\
&\leq \sum_{n\leq N} \lambda_d'([\,\bar a^n,b^n)) \qquad (3.7(d)) \\
&\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_d'([\,\bar a^n,b^n))
\end{aligned}$$

$\bar a \downarrow a, \bar b \uparrow b, \bar a^n \uparrow a^n \Longrightarrow \lambda_d'([\,a,b)) \leq \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \lambda_d'([\,a^n,b^n))$
$\Longrightarrow \lambda_d'([\,a,b)) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \lambda_d'([\,a^n,b^n)) \qquad$ (3.7(e))

$\Longrightarrow \lambda_d'\, \sigma$–additiv $\Longrightarrow \lambda_d''\, \sigma$–additiv. $\square$

5.11 Definition

(a) Unter dem **Lebesgue–Borel–Maß** λ_d auf $\mathcal{B}_d$ versteht man die Fortsetzung von $\lambda_d''/\alpha(\mathcal{I}_d)$ gemäß Kapitel 4.

(b) Unter dem **Lebesgue–Maß** $\tilde\lambda_d/(\mathcal{B}_d)_{\lambda_d}$ versteht man die Vervollständigung von $\lambda_d/\mathcal{B}_d$ (s. Th. 4.17).

(c) A heißt **Lebesgue–messbar**: $\Longleftrightarrow$ $A \in (\mathcal{B}_d)_{\lambda_d}$

5.12 Satz

Zu einer Lebesgue–messbaren Menge A und beliebigem $\varepsilon > 0$ existieren $G \in \mathcal{G}_d$, $F \in \mathcal{F}_d$ mit $F \subset A \subset G$ und $\lambda_d(G \setminus F) < \varepsilon$.

Beweis: Nach 4.12 existiert $G' \in (\alpha(\mathcal{I}_d))_\sigma$ mit $A \subset G'$ und $\lambda_d(G' \setminus A) < \varepsilon/2$ etwa $G' = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} [\, a^n, b^n)$;

zu $[\, a^n, b^n)$ existiert $(\bar{a}^n, b^n) \supset [\, a^n, b^n)$ mit $\lambda_d\Big((\bar{a}^n, b^n) \setminus [\, a^n, b^n)\Big) < \varepsilon \cdot 2^{-(n+1)}$

$\Longrightarrow G := \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} (\bar{a}^n, b^n) \in \mathcal{G}_d$ geeignet. Konstruktion von F analog. $\square$

5.13 Satz (Translationsvarianz von $\boldsymbol{\lambda_d}$)

$B \in \mathcal{B}_d, c \in \mathbb{R}^d \Longrightarrow B + c := \{x + c : x \in B\} \in \mathcal{B}_d$ und $\lambda_d(B + c) = \lambda_d(B)$.

Beweis: Siehe Übungen. $\square$

5.14 Satz (Bewegungsinvarianz von $\boldsymbol{\lambda_d}$)

$f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ sei Bewegung, d.h. $|\, f(x) - f(y)\,| = |\, x - y\,|$ für alle x, $y \in \mathbb{R}^d; B \in \mathcal{B}_d$
$\Longrightarrow f[\, B\,] \in \mathcal{B}_d$ und $\lambda_d(f[\, B\,]) = \lambda_d(B)$.

Beweisskizze:

(1) Jede Bewegung ist Komposition endlich vieler Spiegelungen an Hyperebenen, d.h. f als Spiegelung an einer Hyperebene H annehmbar.

(2) Behauptung richtig, falls B ein Parallelotop mit Seiten parallel oder orthogonal zu H (in diesem Fall existiert Translation g mit $f[\, B\,] = g[\, B\,]$, d.h. 5.13 anwendbar)

(3) Behauptung allgemein richtig
(Mengen aus (2) bilden $\cap$–stabilen Erzeuger von B_d).

$\square$

5.15 Satz

$\mathcal{B}_d \neq \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$.

Beweis: $x \sim y :\iff x - y \in \mathbb{Q}^d (x, y \in \mathbb{R}^d)$ definiert Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}^d$,
$\mathcal{K} :=$ Menge der Äquivalenz–Klassen (überabzählbare Menge; jede Äquivalenz–Klasse abzählbar).
$K \cap [0,1) \neq \emptyset$ für jedes $K \in \mathcal{K}$ ($[0,1) \subset \mathbb{R}^d$).
Es existiert $a : \mathcal{K} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ mit $a(K) \in K \cap [0,1)$ (Auswahlaxiom)
$A := \{a(K) : K \in \mathcal{K}\}$, $A_q := A + q, q \in \mathbb{Q}^d$

$\Longrightarrow$(1) $A_{q_1} \cap A_{q_2} = \emptyset$, falls $q_1 \neq q_2$
(denn, angenommen $b \in A_{q_1} \cap A_{q_2} \Longrightarrow \exists\, a_1, a_2 \in A$ mit
$b = a_1 + q_1 = a_2 + q_2 \Longrightarrow a_1 - a_2 = q_2 - q_1 \in \mathbb{Q}^d$
d.h. $a_1 \sim a_2 \Longrightarrow a_1 = a_2 \Longrightarrow q_1 = q_2$ Widerspruch)

(2) $\bigcup_{q \in \mathbb{Q}^d} A_q = \mathbb{R}^d$ (denn sei $b \in \mathbb{R}^d \Longrightarrow \exists\, a \in A$ mit $a \sim b \Longrightarrow q = b$
$-a \in \mathbb{Q}^d$, d.h. $b = a + q \in A_q$)

(3) $\bigcup_{q \in \mathbb{Q}^d \cap [0,1)} A_q \subset [0,2) \subset \mathbb{R}^d$

(4) Falls $A \in \mathcal{B}_d$, so $\lambda_d(A_q) = \lambda_d(A)$ (5.13)

(1) (3), (4) $\Longrightarrow \lambda_d(A) = 0$, denn: $2^d \geq \lambda_d \left(\bigcup_{q \in \mathbb{Q}^d \cap [0,1)} A_q \right) = \sum_{q \in \mathbb{Q}^d \cap [0,1)} \lambda_d(A_q) =$
$\sum_{q \in \mathbb{Q}^d \cap [0,1)} \lambda_d(A)$

(2) $\Longrightarrow \lambda_d(A) > 0$,
denn: $\infty = \lambda_d(\mathbb{R}^d) = \sum_{q \in \mathbb{Q}^d} \lambda_d(A_q) = \sum_{q \in \mathbb{Q}^d} \lambda_d(A)$.
Widerspruch. Also $A \notin \mathcal{B}_d$.

□

6 Messbare Abbildungen

6.1 Definition

$(X,\mathcal{A}),(X',\mathcal{A}')$ messbare Räume; dann: $f : X \longrightarrow X'$ ist $\mathcal{A}-\mathcal{A}'$–messbar $:\iff f^{-1}(\mathcal{A}') := \{f^{-1}(A') : A' \in \mathcal{A}'\} \subset \mathcal{A}$ (d.h. $f^{-1}(A') \in \mathcal{A}$ für $\forall\, A' \in \mathcal{A}'$)

6.2 Satz

$(X,\mathcal{A}),(X',\mathcal{A}'),(X'',\mathcal{A}'')$ messbare Räume, $f : X \longrightarrow X'$ $\mathcal{A}-\mathcal{A}'$–messbar, $f' : X' \longrightarrow X''$ $\mathcal{A}'-\mathcal{A}''$–messbar $\Longrightarrow f' \circ f : X \longrightarrow X''$ $\mathcal{A}-\mathcal{A}''$–messbar.

Beweis: $(f' \circ f)^{-1}(A'') = f^{-1}(\underbrace{f'^{-1}(A'')}_{\in \mathcal{A}'}) \in \mathcal{A} \quad \forall\, A'' \in \mathcal{A}''$ □

6.3 Satz

$(X,\mathcal{A}),(X',\mathcal{A}')$ messbare Räume, $\mathcal{E}'$ Erzeuger von $\mathcal{A}'$ (d.h. $\mathcal{A}' = \sigma(\mathcal{E}')$), dann:

$$f : X \longrightarrow X' \ \mathcal{A}-\mathcal{A}'\text{–messbar} \iff f^{-1}(E') \in \mathcal{A} \quad \forall\, E' \in \mathcal{E}'$$

Beweis:

$$\begin{array}{lll} ''\Longrightarrow'' & & \mathcal{E}' \subset \mathcal{A}' \\ ''\Longleftarrow'' & & \mathcal{A}^* := \{A' \in \mathcal{A}' : f^{-1}(A') \in \mathcal{A}\} \\ & \Longrightarrow & (1)\mathcal{E}' \subset \mathcal{A}^* \subset \mathcal{A}' \\ & & (2)\mathcal{A}^* \text{ ist } \sigma\text{–Algebra } (A' \in \mathcal{A}^* \Longrightarrow f^{-1}(A'^c) = (f^{-1}(A'))^c \in \mathcal{A} \\ & & \qquad\qquad \Longrightarrow A'^c \in \mathcal{A}^* \text{ etc.}) \\ & \Longrightarrow & \mathcal{A}^* = \mathcal{A}' \end{array}$$

□

6.4 Satz

$\Big((X_i',\mathcal{A}_i')\Big)_{i\in I}$ Familie von messbaren Räumen, $f_i : X \longrightarrow X_i'$ Abb., $i \in I \Longrightarrow \mathcal{A} := \sigma\left(\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathcal{A}_i')\right)$ ist die kleinste σ–Algebra $\mathcal{A}$ über X derart, dass f_i $\mathcal{A}-\mathcal{A}_i'$ –messbar $\forall\, i \in I$.

Beweis: S. Übungen. □

6.5 Definition

Voraussetzung von 6.4, dann $\sigma(f_i : i \in I) := \sigma\left(\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathcal{A}_i')\right)$ "zu den Abbildungen f_i und den σ–Algebren $\mathcal{A}_i', i \in I$, gehörige initiale σ–Algebra"

6.6 Satz

$\Big((X_i, \mathcal{A}_i)\Big)_{i\in I}$ Familie messbarer Räume, $f_i : X_i \longrightarrow X'$ Abb., $i \in I \Longrightarrow$ $\mathcal{A}' := \bigcap_{i\in I}\{A' \subset X' : f_i^{-1}(A') \in \mathcal{A}_i\}$ ist größte σ–Algebra $\mathcal{A}'$ über X' derart, dass f_i $\mathcal{A}_i - \mathcal{A}'$–messbar für $\forall\, i \in I$.

Beweis: S. Übungen. □

6.7 Definition

Voraussetzung von 6.6; dann: $\bigcap_{i\in I}\{A' \subset X' : f_i^{-1}(A') \in \mathcal{A}_i\}$ "finale σ–Algebra".

6.8 Definition

$\bar{\mathcal{B}} := \{B \subset \bar{\mathbb{R}} : B \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}\}$ σ–Algebra der Borelschen Teilmengen von $\bar{\mathbb{R}}$.

$$\begin{aligned}(\bar{\mathcal{B}} = \mathcal{B} \quad &\cup \quad \{B \cup \{+\infty\} : B \in \mathcal{B}\}\\ &\cup \quad \{B \cup \{-\infty\} : B \in \mathcal{B}\}\\ &\cup \quad \{B \cup \{-\infty, +\infty\} : B \in \mathcal{B}\})\end{aligned}$$

6.9 Definition

(a) $(X, \mathcal{A})$ messbarer Raum, $f : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$, dann: f ist $\mathcal{A}$–messbar: $\Longleftrightarrow$ f ist $\mathcal{A} - \bar{\mathcal{B}}$–messbar.

(b) $\bar{\mathcal{M}}(X, \mathcal{A}) := \{f : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}} : f\mathcal{A}\text{–messbar}\}$

(c) $\mathcal{M}(X, \mathcal{A}) := \{f : X \longrightarrow \mathbb{R} : f\mathcal{A}\text{–messbar}\}$

6.10 Satz

(a) $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A}) \iff f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ und $f\mathcal{A} - \mathcal{B}$–messbar.

(b) $f \in \bar{\mathcal{M}}(X, \mathcal{A}) \iff f \cdot 1_{\{f^{-1}(\mathbb{R})\}} \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ und $f^{-1}(\{\pm\infty\}) \in \mathcal{A}$

Beweis: S. Übungen. □

6.11 Satz

$(X, \mathcal{A})$ messbarer Raum, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, dann sind äquivalent zu der Eigenschaft $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$:

(a) $f^{-1}(G) \in \mathcal{A} \quad \forall\, G \in \mathcal{G}$

(b) $f^{-1}(F) \in \mathcal{A} \quad \forall\, F \in \mathcal{F}$

(c) $f^{-1}(K) \in \mathcal{A} \quad \forall\, K \in \mathcal{K}$

(d) $\{f < a\} := \{x \in X : f(x) < a\} \in \mathcal{A} \quad \forall\, a \in \mathbb{R}$

(e) $\{f \leq a\} \in \mathcal{A} \quad \forall\, a \in \mathbb{R}$

(f) $\{f > a\} \in \mathcal{A} \quad \forall\, a \in \mathbb{R}$

(g) $\{f \geq a\} \in \mathcal{A} \quad \forall\, a \in \mathbb{R}$

Beweis: Satz 5.6, 6.3 □

6.12 Satz

$(X, \mathcal{A})$ messbarer Raum, $f : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$. Dann sind äquivalent zu
$f \in \bar{\mathcal{M}}(X, \mathcal{A})$:

(a) $\{f < a\} \in \mathcal{A} \quad \forall\, a \in \bar{\mathbb{R}}$

(b) $\{f \leq a\} \in \mathcal{A} \quad \forall\, a \in \bar{\mathbb{R}}$

(c) $\{f > a\} \in \mathcal{A} \quad \forall\, a \in \bar{\mathbb{R}}$

(d) $\{f \geq a\} \in \mathcal{A} \quad \forall\, a \in \bar{\mathbb{R}}$

Beweis:

(a) (1) $f \in \bar{\mathcal{M}}(X, \mathcal{A}) \Longrightarrow \{f < a\} = f^{-1}(\{x \in \bar{\mathbb{R}} : x < a\}) \in \mathcal{A}$

(2) $f^{-1}(\{+\infty\}) = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{f < n\} \right)^c \in \mathcal{A}$

$\Longrightarrow f \in \bar{\mathcal{M}}(X, \mathcal{A})$, da $\mathcal{E} = \{[-\infty, a) : a \in \mathbb{R}, \{\infty\}\}$ Erzeugendensystem von $\bar{\mathcal{B}}$.

(b) – (d) analog □

6.13 Satz

$(X, \mathcal{A})$ messbarer Raum, $f_1, \ldots, f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}, f := (f_1, \ldots, f_n) : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$,
dann: $f\, \mathcal{A} - \mathcal{B}_n$–messbar $\iff f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$

Beweis: $'' \Longrightarrow''\; i \in \{1, \ldots, n\}, a \in \mathbb{R}$
$\Longrightarrow \{f_i < a\} = \{f \in \{\underbrace{(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n : y_i < a}_{\in \mathcal{B}_n}\}\} \in \mathcal{A}$
$'' \Longleftarrow''\; a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n \Longrightarrow \{f \in (-\infty, a)\} = \bigcap\limits_{1 \le i \le n} \{f_i < a_i\} \in \mathcal{A}$
$\Longrightarrow \{f \in B\} \in \mathcal{A} \quad \forall\, B \in \mathcal{B}_n$ (6.3) $\square$

6.14 Definition

$g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ Borel–messbar (Bairesch)
$:\iff g\, \mathcal{B}_n - \mathcal{B}_m$–messbar.

6.15 Satz

$g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ stetig $\Longrightarrow g$ Borel–messbar.

Beweis: Voraussetzung $\Longrightarrow g^{-1}(\mathcal{G}_m) \subset \mathcal{G}_n \subset \mathcal{B}_n$ (s. 2.24 (ii) An. II) $\Longrightarrow$
$g^{-1}(\mathcal{B}_m) \subset \mathcal{B}_n$ (6.3) $\square$

6.16 Satz

$(X, \mathcal{A})$ messbarer Raum, $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A}), g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ Borel–messbar
$\Longrightarrow g \circ (f_1, \ldots, f_n) \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$

Beweis: 6.13, 6.2 $\square$

6.17 Satz

f bzw. $f_i\, (i = 1, \ldots, n) \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$
$\Longrightarrow a \cdot f (a \in \mathbb{R}), |\, f\, |, \exp(f), \sum\limits_{1 \le i \le n} f_i, \prod\limits_{1 \le i \le n} f_i, \min\limits_{1 \le i \le n} f_i, \max\limits_{1 \le i \le n} f_i \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$.

Beweis: 6.16, 6.15. $\square$

6.18 Satz

$f_n \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A}), n \in \mathbb{N}$

$\Longrightarrow$(a) $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$, falls $\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ nach unten beschränkt $\forall\, x \in X$,

(b) $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$, falls $\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ nach oben beschränkt $\forall\, x \in X$,

(c) $\lim\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$, falls $\lim\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ eigentlich existiert $\forall\, x \in X$.

Beweis: S. Übungen. $\square$

6.19 Satz

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, $(X', \mathcal{A}')$ messbarer Raum, $f : X \longrightarrow X'$ $\mathcal{A} - \mathcal{A}'$ – messbar $\Longrightarrow \mu' : \mathcal{A}' \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$ mit $\mu'(A') := \mu(f^{-1}(A'))$ ist Maß auf $(X', \mathcal{A}')$.

Beweis: S. Übungen. $\square$

6.20 Definition

Voraussetzung von 6.19, dann:
$\mu' =: \mu \circ f^{-1}$ "Bildmaß zu μ und f".

7 Integrierbarkeit

Voraussetzung: $(X, \mathcal{A}, \mu)$ fester Maßraum

7.1 Definition

(a) $e : X \longrightarrow \mathbb{R}$ einfache Funktion
$:\Longleftrightarrow e = \sum\limits_{1 \leq i \leq m} a_i\, 1_{A_i}$ für geeignetes $m \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}_+, A_i \in \mathcal{A}$

(b) $\mathcal{E} := \mathcal{E}(X, \mathcal{A}) := \{e : e \text{ einfache Funktion zu } (X, \mathcal{A})\}$

7.2 Satz

$e \in \mathcal{E}(X, \mathcal{A}) \iff e \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ mit $e \geq 0$ und $|\, e(X)\,| < \infty$
$\iff e = \sum\limits_{1 \leq i \leq m} a_i\, 1_{A_i}$ für geeignetes $m \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}_+$ und **disjunkten** $A_i \in \mathcal{A}$ mit $\bigcup\limits_{1 \leq i \leq m} A_i = X$ ("Normaldarstellung")

Beweis: S. Übungen. □

7.3 Satz

$e = \sum\limits_{1 \leq i \leq m} a_i\, 1_{A_i} = \sum\limits_{1 \leq j \leq n} b_j\, 1_{B_j}$ Normaldarstellungen von $e \in \mathcal{E}$
$\Longrightarrow \sum\limits_{1 \leq i \leq m} a_i\, \mu(A_i) = \sum\limits_{1 \leq j \leq n} b_j\, \mu(B_j)$

Beweis:

$$\begin{aligned}
A_i &= \bigcup_j (A_i \cap B_j) \text{ disjunkte Vereinigung} \\
\Longrightarrow 1_{A_i} &= \sum_j 1_{A_i \cap B_j} \\
\mu(A_i) &= \sum_j \mu(A_i \cap B_j) \\
\Longrightarrow \sum_i a_i\, \mu(A_i) &= \sum_{i,j} a_i\, \mu(A_i \cap B_j) \\
=^{(*)} \sum_{i,j} b_j \mu(A_i \cap B_j) &= \sum_j b_j\, \mu(B_j)
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} \text{zu } (*) : e &= \sum_i a_i \, 1_{A_i} &= \sum_{i,j} a_i \, 1_{A_i \cap B_j} \\ e &= \sum_j b_j \, 1_{B_j} &= \sum_{i,j} b_j \, 1_{A_i \cap B_j} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow a_i = b_j \text{ für } \forall\,(i,j) : A_i \cap B_j \neq \emptyset$$

$\square$

7.4 Definition

$\int e \, d\mu := \sum_{1 \le i \le m} a_i \, \mu(A_i)$, falls $e = \sum_i a_i \, 1_{A_i}$ Normaldarstellung von $e \in \mathcal{E}$.

7.5 Satz

(a) $e \in \mathcal{E}, a \in \mathbb{R}_+$
$\Longrightarrow a\, e \in \mathcal{E}$ und $\int a\, e \, d\mu = a \int e \, d\mu$

(b) $e_1, e_2 \in \mathcal{E} \Longrightarrow e_1 + e_2 \in \mathcal{E}$
und $\int e_1 + e_2 \, d\mu = \int e_1 \, d\mu + \int e_2 \, d\mu$

(c) $e = \sum_{1 \le i \le m} a_i \, 1_{A_i} \in \mathcal{E}$
$\Longrightarrow \int e \, d\mu = \sum_{1 \le i \le m} a_i \, \mu(A_i) \; (0 \cdot \infty := 0 =: \infty \cdot 0)$

(d) $e_1 \le e_2, e_1, e_2 \in \mathcal{E} \Longrightarrow \int e_1 \, d\mu \le \int e_2 \, d\mu$

Beweis:

(a) trivial

(b) $e_1 = \sum_{1 \le i \le m} a_i \, 1_{A_i}, e_2 = \sum_{1 \le j \le m} b_j \, 1_{B_j}$ Normaldarstellungen
$\Longrightarrow e_1 = \sum_{i,j} a_i \, 1_{A_i \cap B_j}, e_2 = \sum_{j,i} b_j \, 1_{A_i \cap B_j}$ Normaldarstellungen
$\Longrightarrow e_1 + e_2 = \sum_{i,j} (a_i + b_j) \, 1_{A_i \cap B_j}$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \int e_1 + e_2 \, d\mu &= \sum_{i,j} (a_i + b_j) \, \mu(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{i,j} a_i \, \mu(A_i \cap B_j) + \sum_{i,j} b_j \, \mu(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_i a_i \, \mu(A_i) + \sum_j b_j \, \mu(B_j) = \int e_1 \, d\mu + \int e_2 \, d\mu \end{aligned}$$

(c) aus (a) und (b) und $\int 1_{A_i} d\,\mu = \mu(A_i)$

(d) nach Beweis zu (b) existieren $A_i \in \mathcal{A}$: $e_1 = \sum\limits_{1 \le i \le m} a_i\, 1_{A_i}, e_2 = \sum\limits_{1 \le i \le m} b_i\, 1_{A_i}$ Normaldarstellungen
$\Longrightarrow a_i \le b_i \,\forall\, i$ mit $A_i \ne \emptyset$
$\Longrightarrow$ Behauptung $\square$

7.6 Definition

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{M}}_+ &:= \bar{\mathcal{M}}_+(X, \mathcal{A}) := \{f \in \bar{\mathcal{M}}(X, \mathcal{A}) : f \ge 0\} \\ \mathcal{M}_+ &:= \mathcal{M}_+(X, \mathcal{A}) := \{f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A}) : f \ge 0\} \end{aligned}$$

7.7 Satz

$f \in \bar{\mathcal{M}}_+(X, \mathcal{A}) \iff \exists\, e_n \uparrow f$ für geeignetes $e_n \in \mathcal{E}(X, \mathcal{A}), n \in \mathbb{N}$

Beweis: $'' \Longleftarrow ''$ trivial ($f = \sup e_n$ messbar, vgl. 6.18)

$$'' \Longrightarrow '' \; e_n := \sum_{i=0}^{n\,2^n - 1} \frac{i}{2^n}\, 1_{\{\frac{i}{2^n} \le f < \frac{i+1}{2^n}\}} + n\, 1_{\{f \ge n\}}$$

$\square$

7.8 Satz

$e, e_1, e_2, e_3, \ldots$ mit $e_1 \le e_2 \le \ldots$ einfache Funktionen,
und $e \le \lim\limits_{n \to \infty} e_n$
$\Longrightarrow \int e\, d\,\mu \le \lim\limits_{n \to \infty} \int e_n\, d\,\mu$

Beweis: $e = \sum\limits_{1 \le i \le m} a_i\, 1_{A_i}$ mit $m \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}_+, A_i \in \mathcal{A}$ disjunkt
$\vartheta \in [0, 1), K_n := \{\vartheta\, e \le e_n\}, n \in \mathbb{N}$
$\Longrightarrow K_n \in \mathcal{A}, K_n \uparrow X$, d.h. $A_i \cap K_n \uparrow A_i$

d.h. $\mu(A_i \cap K_n) \uparrow \mu(A_i)$ (3.12)

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \vartheta \int e\, d\mu &= \vartheta \sum_i a_i \mu(A_i) = \lim_{n\to\infty} \vartheta \sum_i a_i \mu(A_i \cap K_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int \underbrace{\vartheta\, e\, 1_{K_n}}_{\le e_n} d\mu \\
&\quad \left(e\, 1_{K_n} = \sum_i a_i\, 1_{A_i \cap K_n} \right) \\
&\le \lim_{n\to\infty} \int e_n d\mu
\end{aligned}$$

□

7.9 Satz

$e_1 \le e_2 \le, \dots, e'_1 \le e'_2 \le, \dots$ einfache Funktionen mit
$\lim\limits_{n\to\infty} e_n = \lim\limits_{n\to\infty} e'_n$
$\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \int e_n\, d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int e'_n\, d\mu$

Beweis: $e_m \le \lim\limits_{n\to\infty} e'_n \quad \forall\, m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
7.8 \quad \Longrightarrow \quad & \int e_m\, d\mu \le \lim_{n\to\infty} \int e'_n\, d\mu \quad \forall\, m \in \mathbb{N} \\
\Longrightarrow \quad & \lim_{m\to\infty} \int e_m\, d\mu \le \lim_{n\to\infty} \int e'_n\, d\mu
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Behauptung. □

7.10 Definition

$\int f\, d\mu := \lim\limits_{n\to\infty} \int e_n d\mu$, falls $f \in \bar{\mathcal{M}}_+(X, \mathcal{A}), e_n \uparrow f$ mit $e_n \in \mathcal{E}$.

7.11 Satz

(a) $\int a f d\mu = a \int f d\mu, \quad f \in \bar{\mathcal{M}}_+(X, \mathcal{A}), \quad a \in \bar{\mathbb{R}}_+$

(b) $\int f_1 + f_2\, d\mu = \int f_1\, d\mu + \int f_2\, d\mu, \quad f_1, f_2 \in \bar{\mathcal{M}}_+(X, \mathcal{A})$

(c) $f_1 \le f_2 \Longrightarrow \int f_1\, d\mu \le \int f_2\, d\mu, \quad f_1, f_2 \in \bar{\mathcal{M}}_+(X, \mathcal{A})$.

Beweis: Siehe Übungen. $\square$

$a^+ := \max(a, 0), a := \max(-a, 0)$
$|\, a\,| = a^+ + a^-, a \in \bar{\mathbb{R}}.$

7.12 Definition

$f \in \bar{\mathcal{M}}(X, \mathcal{A})$, dann $f(\mu-)$ integrierbar
$\iff \int f^+ d\mu < \infty$ und $\int f^- d\mu < \infty$

f quasi–integrierbar $\iff \int f^+ d\mu < \infty$ **oder** $\int f^- d\mu < \infty$

$\int f d\mu := \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$, falls f quasi–integrierbar

$\mathcal{L} := \mathcal{L}(\mu) := \mathcal{L}(X, \mathcal{A}, \mu) := \{f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A}) : f$ ist $(\mu-)$ intergrierbar$\}$
$\hat{\mathcal{L}} := \hat{\mathcal{L}}(\mu) := \hat{\mathcal{L}}(X, \mathcal{A}, \mu) := \{f \in \bar{\mathcal{M}}(X, \mathcal{A}) : f$ ist $(\mu-)$ quasi–intergrierbar$\}$

7.13 Satz

$f \in \bar{\mathcal{M}}(X, \mathcal{A})$, dann:
$f \in \mathcal{L} \iff |\, f\,| \in \mathcal{L} \iff g \leq f \leq h$ für geeignetes $g, h \in \mathcal{L}$

Beweis: $|\, f\,| = f^+ + f^-, -f^- \leq f \leq f^+$
$g \leq f \leq h \Longrightarrow f^+ \leq h^+, f^- \leq g^- \Longrightarrow \int f^+ d\mu < \infty$ und $\int f^- d\mu < \infty$
$\square$

7.14 Satz

(a) $f \in \mathcal{L}$ (bzw. $\hat{\mathcal{L}}$), $a \in \mathbb{R} \Longrightarrow af \in \mathcal{L}$ (bzw. $af \in \hat{\mathcal{L}}$) und $\int af d\mu$
$= a \int f d\mu$

(b) $f_1, f_2 \in \mathcal{L} \Longrightarrow f_1 + f_2 \in \mathcal{L}, \int f_1 + f_2 \, d\mu = \int f_1 \, d\mu + \int f_2 d\mu$

(c) $f_1, f_2 \in \hat{\mathcal{L}}, f_1 \leq f_2 \Longrightarrow \int f_2 \, d\mu \leq \int f_2 \, d\mu$

Beweis:

(a)

$$\int (a\,f)^+ d\mu = \begin{cases} \displaystyle\int a f^+ d\mu & = & a \displaystyle\int f^+ d\mu & \text{falls } a \geq 0 \\ \displaystyle\int |\,a\,| f^- d\mu & = & |\,a\,| \displaystyle\int f^- d\mu & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

$$\int (a\,f)^- d\mu = \begin{cases} \displaystyle\int a f^- d\mu & = & a \displaystyle\int f^- d\mu & \text{falls } a \geq 0 \\ \displaystyle\int |\,a\,| f^+ d\mu & = & |\,a\,| \displaystyle\int f^+ d\mu & \text{falls } a \leq 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \int a f d\mu = \int (af)^+ d\mu - \int (af)^- d\mu$$

$$= \begin{cases} a\left(\displaystyle\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu\right) & a \geq 0 \\ |\,a\,|\left(\displaystyle\int f^- d\mu - \int f^+ d\mu\right) & a < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &= a\left(\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu\right) \\ &= a \int f d\mu \end{aligned}$$

(b) $f_1 + f_2 \in \mathcal{M}$ (Kapitel 6)

$$f_1 + f_2 \in \mathcal{L} \iff |\,f_1 + f_2\,| \in \mathcal{L}$$

$$\begin{aligned} \int |\,f_1 + f_2\,| d\mu &\leq \int |\,f_1\,| + |\,f_2\,| d\mu \\ &= \int |\,f_1\,| d\mu + \int |\,f_2\,| d\mu < \infty \end{aligned}$$

$\Longrightarrow f_1 + f_2 \in \mathcal{L}$

$$\int (f_1 + f_2) d\mu = \int (f_1 + f_2)^+ d\mu - \int (f_1 + f_2)^- d\mu$$

$$(f_1 + f_2)^+ - (f_1 + f_2)^- = f_1 + f_2 = f_1^+ - f_1^- + f_2^+ - f_2^-$$

$$\Longrightarrow (f_1 + f_2)^+ + f_1^- + f_2^- = (f_1 + f_2)^- + f_1^+ + f_2^+$$

$$\Longrightarrow \int (f_1+f_2)^+ d\mu + \int f_1^- d\mu + \int f_2^- d\mu = \int (f_1+f_2)^- d\mu + \int f_1^+ d\mu$$
$+ \int f_2^+ d\mu$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \int (f_1+f_2) d\mu &= \int (f_1+f_2)^+ d\mu - \int (f_1+f_2)^- d\mu \\
&= \int f_1 + d\mu + \int f_2^+ d\mu - \int f_1^+ d\mu - \int f_2^- d\mu \\
&= \int f_1 d\mu + \int f_2 d\mu
\end{aligned}$$

(c) $f_1 \leq f_2 \Longrightarrow f_1^+ \leq f_2^+, f_1^- \geq f_2^-$
$\Longrightarrow \int f_1 d\mu = \int f_1^+ d\mu - \int f_1^- d\mu \leq \int f_2^+ d\mu - \int f_2^- d\mu = \int f_2 d\mu$

□

7.15 Definition

$A \in \mathcal{A}, f : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$; dann:

(a) $f(\mu-)$ integrierbar über A
$:\Longleftrightarrow$ $f \cdot 1_A$ integrierbar

(b) $f(\mu-)$ quasi–integrierbar über A
$:\Longleftrightarrow$ $f \cdot 1_A$ quasi–integrierbar

(c) $\int\limits_A f d\mu := \int f \cdot 1_A \, d\mu$, falls f quasi–integrierbar über A

7.16 Satz

$f \in \mathcal{L}(\hat{\mathcal{L}}) \Longrightarrow f$ über A integrierbar (quasi–integrierbar) $\forall A \in \mathcal{A}$

Beweis: $(f \cdot 1_A)^+ \leq f^+, (f \cdot 1_A)^- \leq f^-$, 7.13. □

7.17 Definition

$f, f' \in \bar{\mathcal{M}}(X, \mathcal{A})$, dann:

$$\begin{aligned}
f \overline{\overline{\mu}} f' \quad &:\Longleftrightarrow \quad f = f'(\mu) \\
&:\Longleftrightarrow \quad \mu(\{f \neq f'\}) = 0 \, (\text{"}f \text{ gleich } f' \, \mu - \text{ fast überall"})
\end{aligned}$$

7.18 Satz

(a) $f, f' \in \hat{\mathcal{L}}$, dann:

$$f \overset{=}{\mu} f' \Longrightarrow \int_A f d\mu = \int_A f' d\mu \quad \forall\, A \in \mathcal{A}$$

(b)

$$f, f' \in \mathcal{L} \text{ mit } \int_A f\, d\mu = \int_A f'\, d\mu \,\forall\, A \in \mathcal{A} \Longrightarrow f \overset{=}{\mu} f'.$$

Beweis: (a)

(1) O.B.d.A. $A = X$ ($f \overset{=}{\mu} f' \Longrightarrow f \cdot 1_A \overset{=}{\mu} f' \cdot 1_A \quad \forall\, A \in \mathcal{A}$)

(2) O.B.d.A. $f, f' \in \bar{\mathcal{M}}_+(X, \mathcal{A})$
($f \overset{=}{\mu} f' \Longrightarrow f^+ \overset{=}{\mu} f'^+, f^- \overset{=}{\mu} f'^-$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow \int f d\mu &= \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \\ &= \int f'^+ d\mu - \int f'^- d\mu = \int f' d\mu)\end{aligned}$$

(3) O.B.d.A. $f, f' \in \mathcal{E}$

$$\Big(f, f' \in \bar{\mathcal{M}}_+, f \overset{=}{\mu} f' \Longrightarrow \exists\, e_n \in \mathcal{E} \text{ mit } e_n \uparrow f,$$

$$\exists\, e'_n \in \mathcal{E} \text{ mit } e'_n \uparrow f' \Longrightarrow e''_n := e_n \cdot 1_{\{f=f'\}} + e'_n\, 1_{\{f \neq f'\}} \in \mathcal{E},$$

$$e''_n \uparrow f', e''_n \overset{=}{\mu} e_n$$

$$\Longrightarrow \int f' d\mu = \lim_{n\to\infty} \int e''_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int e_n d\mu = \int f d\mu \Big)$$

(4) Behauptung richtig für einfache Funktionen f, f':
$f, f' \in \mathcal{E}$ mit $f \overset{=}{\mu} f' \Longrightarrow f = \sum\limits_{1 \le i \le n} a_i\, 1_{A_i},\ f' = \sum\limits_{1 \le i \le n} b_i\, 1_{A_i}$ Normaldarstellungen von f, f'

$$\begin{aligned}&\Longrightarrow \quad a_i = b_i \text{ für alle } i \text{ mit } \mu(A_i) > 0 \\ &\Longrightarrow \quad \int f d\mu = \sum_i a_i \mu(A_i) \\ &\qquad\qquad\quad = \sum_i b_i \mu(A_i) = \int f' d\mu\end{aligned}$$

(b) Siehe Übungen. $\square$

7.19 Definition

$f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n, \lambda_n), \quad B \in \mathcal{B}_n$, dann:

$$\int\limits_B f d\lambda_n =: \int\limits_B f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$$

7.20 Beispiel

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ beliebig, $a_n \in \bar{\mathbb{R}}$, $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, disjunkt
$f = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n\, 1_{A_n}$, dann:
f integrierbar $\iff \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |\, a_n\, |\mu(A_n) < \infty$;
in diesem Fall:

$$\int f\, d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \mu(A_n).$$

Beweis: Siehe Übungen. $\square$

8 Weitere Eigenschaften des Integrals

8.1 Satz (von der monotonen Konvergenz, Beppo Levi)

(a) $f_n \in \hat{\mathcal{L}}, f_n \uparrow f, \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \int f_n d\mu > -\infty$

$\Longrightarrow f \in \hat{\mathcal{L}}$ und $\int f_n d\mu \uparrow \int f d\mu$

(b) $f_n \in \hat{\mathcal{L}}, f_n \downarrow f, \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \int f_n d\mu < \infty$

$\Longrightarrow f \in \hat{\mathcal{L}}$ und $\int f_n d\mu \downarrow \int f d\mu$

Beweis: (a)

(1) O.B.d.A. $\int f_1 d\mu > -\infty$

(2) $\mu(\{f_1 = -\infty\}) = 0$
(sonst $\int f_1 \, d\mu = -\infty$),
d.h. o.B.d.A. $f_1(x) > -\infty \quad \forall\, x \in X$ annehmbar,
sonst Übergang von f_1 zu $f_1' = f_1 \cdot 1_{\{f_1 > -\infty\}}$

(3) O.B.d.A. $\int f_1 d\mu < +\infty$ (sonst trivial)
O.B.d.A. $f_n \geq 0$ (sonst Übergang zu $f_n' := f_n - f_1$)

(4) $f_n \in \bar{\mathcal{M}}_+(X, \mathcal{A}), f_n \uparrow f$

$$\Longrightarrow \; \exists\, e_{mn} \in \mathcal{E} \text{ mit } e_{mn} \uparrow f_m \text{ für } n \to \infty \, (m \in \mathbb{N})$$

$$\begin{array}{lcl}
e_{11} \leq e_{12} \leq e_{13} \leq \ldots & & \uparrow f_1 \\
e_{21} \leq e_{22} \leq e_{23} \leq \ldots & & \uparrow f_2 \\
\vdots & & \vdots \\
e_{m1} \leq e_{m2} \leq e_{m3} \leq \ldots & & \uparrow f_m \\
\vdots & & \vdots \\
e_n' := \max\limits_{i,j \leq n} e_{ij} & = & \max(e_{1n}, \ldots, e_{nn})
\end{array}$$

Behauptung: $e_n' \in \mathcal{E}$ und $e_n' \uparrow f$, denn:
$e_n' \leq \max(f_1, \ldots, f_n) = f_n \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} e_n' \leq f$
$e_n' \geq e_{mn} \,\forall\, n \geq m$
$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} e_n' \geq \lim e_{mn} = f_m \quad \forall\, m \in \mathbb{N} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} e_n' \geq f.$

Also $\lim_{n\to\infty} e'_n = f$ d.h.

$$\begin{aligned} \int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int e'_n d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu \leq \int f d\mu \\ \Longrightarrow \quad \int f_n d\mu \uparrow \int f d\mu \end{aligned}$$

$\square$

(b) Betrachte $-f_n$.

8.2 Satz (Lemma von Fatou)

(a) $f_n \in \mathcal{L}, n \in \mathbb{N}, g \leq f_n \leq h$ für ein $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$; $h \in \mathcal{L}$

$$\Longrightarrow \limsup_{n\to\infty} f_n \in \hat{\mathcal{L}} \text{ und } \int \limsup_{n\to\infty} f_n d\mu \geq \limsup_{n\to\infty} \int f_n d\mu$$

(b) $f_n \in \mathcal{L}, n \in \mathbb{N}, g \leq f_n \leq h$ für ein $g \in \mathcal{L}, h : X \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\Longrightarrow \liminf_{n\to\infty} f_n \in \hat{\mathcal{L}} \text{ und } \int \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu$$

Beweis: (a)

$$\limsup_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} (\sup_{m\geq n} f_m) \in \mathcal{M}$$

$$\sup_{m\geq n} f_m \downarrow \limsup_{n\to\infty} f_n$$

$$\Longrightarrow_{8.1} \limsup_{n\to\infty} f_n \in \hat{\mathcal{L}} \text{ und } \int \sup_{m\geq n} f_m \, d\mu \downarrow \int \limsup_{n\to\infty} f_n d\mu$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \limsup_{n\to\infty} \int f_n d\mu &= \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{m\geq n} \int f_m d\mu \right) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \int \sup_{m\geq n} f_m d\mu \\ &= \int \limsup_{n\to\infty} f_n d\mu \end{aligned}$$

(b) Mittels $-f_n$ und (a). $\square$

8.3 Satz (von der majorisierten (dominierten) Konvergenz, Lebesgue)

$f_n \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A}), n \in \mathbb{N}, f_n \longrightarrow f, |\, f_n \,| \leq g$ mit $gn \in \mathbb{N} \in \mathcal{L}$
$\Longrightarrow f_n, f \in \mathcal{L}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu$

Beweis: $f_n, f \in \mathcal{L}$ nach 7.13, $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n = f = \limsup\limits_{n\to\infty} f_n$

$$\begin{aligned}
8.2 \Longrightarrow \limsup_{n\to\infty} \int f_n d\mu &\leq \int \limsup_{n\to\infty} f_n d\mu = \int f\, d\mu \\
&= \int \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu \\
\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu &= \int f\, d\mu
\end{aligned}$$

□

8.4 Satz

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, $(X', \mathcal{A}')$ messbarer Raum,
$g : X \longrightarrow X'$ $\mathcal{A} - \mathcal{A}'$–messbar, $f' : X' \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}' - \bar{\mathcal{B}}$–messbar,
$\mu' := \mu \circ g^{-1}, f := f' \circ g$, dann gilt:

$$f' \in \hat{\mathcal{L}}(X', \mathcal{A}', \mu') \iff f \in \hat{\mathcal{L}}(X, \mathcal{A}, \mu)$$

und in diesem Fall $\int f' d\mu' = \int f d\mu$

Beweis:

(1) $e' \in \mathcal{E}(X', \mathcal{A}')$, etwa $e' = \sum\limits_{1\leq i\leq m} a_i\, 1_{A_i'}$
mit $a_i \in \mathbb{R}_+, A_i \in \mathcal{A}'$ mit disjunkten A_i

$\Longrightarrow e := e' \circ g \in \mathcal{E}(X, \mathcal{A}), e = \sum\limits_{1\leq i\leq m} a_i\, 1_{A_i'}$
mit $A_i := g^{-1}[\, A_i' \,]$, also $\mu(A_i) = \mu'(A_i')$
$\Longrightarrow \int e' d\mu' = \sum\limits_i a_i \mu'(A_i) = \sum\limits_i a_i \mu(A_i) = \int e d\mu$

(2) $f' \in \bar{\mathcal{M}}_+(X', \mathcal{A}') \Longrightarrow \exists\, e'_n \in \mathcal{E}(X', \mathcal{A}'), e'_n \uparrow f'$
$f := f' \circ g \in \bar{\mathcal{M}}_+(X, \mathcal{A})$ und
$e_n := e'_n \circ g \in \mathcal{E}(X, \mathcal{A}), e_n \uparrow f$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \int f' d\mu' = \lim_{n\to\infty} \int e'_n d\mu' \quad &=_{(1)} \quad \lim_{n\to\infty} \int e_n d\mu \\ &= \quad \int f d\mu \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{array}{rcl} f' \in \bar{\mathcal{M}}(X', \mathcal{A}') & \Longrightarrow & f^{'+}, f^{'-} \in \bar{\mathcal{M}}_+(X', \mathcal{A}') \\ f^+ = (f' \circ g)^+ & = & f^{'+} \circ g \in \bar{\mathcal{M}}_+(X, \mathcal{A}) \\ f^- = (f' \circ g)^- & = & f^{'-} \circ g \in \bar{\mathcal{M}}_+(X, \mathcal{A}) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \Longrightarrow_{(2)} \int f^+ d\mu & = & \int (f')^+ d\mu', \int f^- d\mu = \int f^{'-} d\mu' \\ \Longrightarrow \int f' d\mu & = & \int f^{'+} d\mu' - \int f^{'-} d\mu' \\ & = & \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu = \int f d\mu \end{array}$$

$\square$

9 Konvergenzbegriffe

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ beliebiger Maßraum

9.1 Definition

$$f_n, f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A}), \text{ dann: } f_n \longrightarrow_{\text{f.ü.}} f :\Longleftrightarrow \mu\left(\left\{\lim_{n\to\infty} f_n = f\right\}^c\right) = 0$$

9.2 Satz

$$f_n \longrightarrow_{\text{f.ü.}} f, \text{ dann: } f_n \longrightarrow_{\text{f.ü.}} g \iff f \overset{=}{\mu} g$$

Beweis:

$''\Longleftarrow''$ trivial

$''\Longrightarrow''$ $f_n \longrightarrow_{\text{f.ü.}} f, f_n \longrightarrow_{\text{f.ü.}} g$

$\Longrightarrow$ $\{f \neq g\} \subset \{f_n \to f\}^c \cup \{f_n \to g\}^c = (\{f_n \longrightarrow f\} \cap \{f_n \longrightarrow g\})^c$

$\Longrightarrow$ $\mu(\{f \neq g\}) \leq \mu(\{f_n \to f\}^c) + \mu(\{f_n \to g\}^c) = 0$

d.h. $f \overset{=}{\mu} g$

$\square$

9.3 Satz

$f_n^i \longrightarrow_{\text{f.ü.}} f^i\,(i = 1, \dots, k), g : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig

$\Longrightarrow g \circ (f_n^1, \dots, f_n^k) \longrightarrow_{\text{f.ü.}} g \circ (f^1, \dots, f^k)$

Beweis: $\exists\ N \in \mathcal{A}$ mit $\mu(N) = 0$, so dass $f_n^i(x) \longrightarrow f^i(x) \quad \forall\, x \in N^c$, $i = 1, \dots, k \Longrightarrow g(f_n^1(x), \dots, f_n^k(x)) \longrightarrow g(f^1(x), \dots, f^k(x)) \quad \forall\, x \in N^c$

$\square$

9.4 Beispiele

$f_n \longrightarrow_{\text{f.ü.}} f, g_n \longrightarrow_{\text{f.ü.}} g \Longrightarrow f_n + g_n \longrightarrow_{\text{f.ü.}} f + g$
(ebenso $\cdot, \min, \max, e^{\cdot}$)

9.5 Satz

$$f_n \longrightarrow_{\text{f.ü.}} f \iff \mu\left(\bigcap_{m\geq 1}\bigcup_{n\geq m}\{|\, f_n - f\,| > \varepsilon\}\right) = 0 \quad \forall\,\varepsilon > 0$$

$$\left(\iff \mu\left(\bigcup_{n\geq m}\{|\, f_n - f\,| > \varepsilon\}\right) \longrightarrow_{m\to\infty} 0 \quad \forall\,\varepsilon > 0,\ \text{falls } \mu\text{–finit}\right)$$

Beweis: $f_n(x) \longrightarrow f(x) \iff x \in \bigcap_{\varepsilon>0}\bigcup_{m\geq 1}\bigcap_{n\geq m}\{|\, f_n - f\,| \leq \varepsilon\}$

$$\begin{aligned}
\left\{\lim_{n\to\infty} f_n = f\right\}^c &= \bigcup_{\varepsilon>0}\bigcap_{m\geq 1}\bigcup_{n\geq m}\{|\, f_n - f\,| > \varepsilon\} \\
&= \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\bigcap_{m\geq 1}\bigcup_{n\geq m}\left\{|\, f_n - f\,| > \frac{1}{k}\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow f_n \longrightarrow_{\text{f.ü.}} f \quad &\iff \quad \bigcap_{m\geq 1}\bigcup_{n\geq m}\left\{|\, f_n - f\,| > \frac{1}{k}\right\} \text{ ist } \mu\text{–Nullmenge} \quad \forall\, k \in \mathbb{N} \\
&\iff \quad \mu\left(\bigcap_{m\geq 1}\bigcup_{n\geq m}\{|\, f_n - f\,| > \varepsilon\}\right) = 0 \quad \forall\,\varepsilon > 0
\end{aligned}$$

$\square$

9.6 Satz

f_n f.ü. konvergent (gegen ein geeignetes $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$)

$$\iff \quad \mu\left(\bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{n_1,n_2\geq n}\{|\, f_{n_1} - f_{n_2}\,| > \varepsilon\}\right) = 0 \quad \forall\,\varepsilon > 0$$

$$\left(\iff \quad \lim_{n\to\infty}\mu\left(\bigcup_{n_1,n_2\geq n}\{|\, f_{n_1} - f_{n_2}\,| > \varepsilon\}\right) = 0 \quad \forall\,\varepsilon > 0 \text{ falls } \mu \text{ finit.}\right)$$

Beweis:

Cauchy–Kriterium: $(f_n(x)_{n\in\mathbb{N}})$ eigentlich konvergent

$$\iff \quad x \in \bigcap_{\varepsilon>0}\bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{n_1,n_2\geq n}\{|\, f_{n_1} - f_{n_2}\,| \leq \varepsilon\}$$

$$\{f_n \text{ nicht eigentlich konvergent}\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{n_1,n_2\geq n}\left\{|\, f_{n_1} - f_{n_2}\,| > \frac{1}{k}\right\}$$

$\square$

9.7 Satz (Egorov)

μ finit, $f_n \longrightarrow_{\text{f.ü.}} f \implies \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\ A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) < \varepsilon$ und $f_n \longrightarrow f$ gleichmäßig auf A^c.

Beweis: Nach 9.5 gilt $\lim\limits_{m\to\infty} \mu\left(\bigcup\limits_{n\geq m} \left\{|\, f_n - f\,| > \frac{1}{k}\right\}\right) = 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$

$$\implies \text{zu } k \in \mathbb{N}\ \exists\, m_k \in \mathbb{N} \text{ mit } \mu\Bigg(\underbrace{\bigcup_{n\geq m_k} \left\{|\, f_n - f\,| > \frac{1}{k}\right\}}_{=:A_k}\Bigg) < \frac{\varepsilon}{2^k}$$

$$\implies A := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \text{ geeignet, denn:}$$

$$(1) \quad \mu(A) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k) < \varepsilon$$

$$(2) \quad x \in A^c \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k^c = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq m_k} \left\{|\, f_n - f\,| \leq \frac{1}{k}\right\}, \text{ d.h.}$$

$f_n \longrightarrow f$ gleichmäßig auf A^c $\left(\text{für } n \geq m_k \text{ und } x \in A^c \text{ gilt } |\, f_n(x) - f(x)\,| < \frac{1}{k}\right)$ $\square$

9.8 Beispiel

$(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda), f_n := 1_{[n,\infty)} \implies f_n \longrightarrow 0$, aber es existiert kein $A \in \mathcal{B}$ mit $\lambda(A) < 1$ derart, dass $f_n \longrightarrow 0$ gleichmäßig auf A^c, d.h. "μ finit" in 9.7 wesentlich.

9.9 Definition

$f_n, f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$, dann

$$f_n \longrightarrow_{\text{n.M.}} f :\iff \mu(\{|\, f_n - f\,| > \varepsilon\} \cap A) \longrightarrow_{n\to\infty} 0 \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, A \in \mathcal{A}, \mu(A) < \infty,$$

$$(\iff \mu(\{|\, f_n - f\,| > \varepsilon\}) \longrightarrow_{n\to\infty} 0 \quad \forall\, \varepsilon > 0, \text{ falls } \mu \text{ finit})$$

("f_n konvergiert dem Maße nach gegen f")

9.10 Beispiel

$(X,\mathcal{A},\mu) := (\mathbb{R},\mathcal{B},\lambda), f_n := 1_{[\,n,\infty)}, f = 0 \Longrightarrow f_n \longrightarrow_{\text{n.M.}} f$
$\Big(\lambda(A) < \infty, \lambda(A \cap [\,n,\infty)) \longrightarrow 0$ für $n \to \infty$ nach Satz 3.12
aber es gilt nicht $\lambda\left(\left\{|\,f_n - f\,| > \frac{1}{2}\right\}\right) \longrightarrow 0$, d.h. "$\cap A$" in 9.9. wesentlich.$\Big)$

9.11 Satz

$f_n \longrightarrow_{\text{n.M.}} f, \mu\,\sigma$–finit, dann: $f_n \longrightarrow_{\text{n.M.}} g \iff f \overset{=}{\mu}\, g$

Beweis: $'' \Longleftarrow''$ $\mu(\{|\,f_n - g\,| > \varepsilon\} \cap A) = \mu(\{|\,f_n - f\,| > \varepsilon\} \cap A) \longrightarrow_{n\to\infty} 0$,
für $\varepsilon > 0$ und $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) < \infty$

$$\begin{array}{ll}
'' \Longrightarrow'' & \{|\,f-g\,| > \varepsilon\} \subset \left\{|\,f_n - f\,| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{|\,f_n - g\,| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \\
\Longrightarrow & \{|\,f-g\,| > \varepsilon\} \cap A \subset \left(\left\{|\,f_n - f\,| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cap A\right) \cup \left(\left\{|\,f_n - g\,| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cap A\right) \\
\Longrightarrow & \mu(\ldots) \le \mu(\ldots) + \mu(\ldots) \longrightarrow 0 \\
\Longrightarrow & \mu(\{|\,f-g\,| > \varepsilon\} \cap A) = 0 \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, A \in \mathcal{A}, \mu(A) < \infty \\
\Longrightarrow & \text{für } \{f \neq g\} = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} \left\{|\,f-g\,| > \frac{1}{k}\right\} = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(\left\{|\,f-g\,| > \frac{1}{k}\right\} \cap X_n\right), X = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n \\
& \text{normale Zerlegung, d.h. } X_n \text{ disjunkt, } \mu(X_n) < \infty, \text{ gilt } \mu(\{f \neq g\}) = 0.
\end{array}$$

□

9.12 Beispiel

$X = \{0,1,2,\ldots\}, \mathcal{A} := \mathcal{P}(X), \mu(\{0\}) = \infty$
$\mu(\{n\}) = 2^{-n} \quad (n \in \mathbb{N})$

$$f_n(i) = \begin{cases} n & \text{für } i = 0 \\ 0 & \text{für } i = 1,\ldots,n \\ 1 & \text{für } i > n \end{cases}$$

$\Longrightarrow f_n \longrightarrow_{\text{n.M.}} f^a := a \cdot 1_{\{0\}}, \quad a \in \mathbb{R}$

$$\mu\Big(\{|\,f_n - f\,| > \varepsilon\} \cap A\Big) \longrightarrow_{n\to\infty} 0, \quad \forall\, \varepsilon > 0, \quad \mu(A) < \infty$$

9.13 Satz

$f_n \longrightarrow_{\text{f.ü.}} f \Longrightarrow f_n \longrightarrow_{\text{n.M.}} f$

Beweis:

$$
\begin{aligned}
f_n \longrightarrow_{\text{f.ü.}} f \quad & \Longleftrightarrow_{9.5} \quad \mu\left(\bigcap_{m\geq 1}\ \bigcup_{n\geq m}\{|\, f_n - f\,| > \varepsilon\}\right) = 0 \quad \forall\, \varepsilon > 0 \\
& \Longrightarrow \quad \mu\left(\bigcap_{m\geq 1}\left(\bigcup_{n\geq m}\{|\, f_n - f\,| > \varepsilon\}\cap A\right)\right) = 0, \quad \mu(A) < \infty \\
& \Longrightarrow_{3.12} \quad \mu\left(\bigcup_{n\geq m}\{|\, f_n - f\,| > \varepsilon\}\cap A\right) \longrightarrow_{m\to\infty} 0 \\
& \Longrightarrow \quad \mu\Big(\{|\, f_n - f\,| > \varepsilon\}\cap A\Big) \longrightarrow_{m\to\infty} 0 \quad \forall\, \varepsilon > 0, \forall\, A : \mu(A) < \infty
\end{aligned}
$$

$\square$

9.14 Beispiel

$X = [\,0,1\,], \mathcal{A} := \mathcal{B} \cap [\,0,1\,], \mu := \lambda/\mathcal{A}$
$f_{k,n} := 1_{[\,\frac{k-1}{2^n},\frac{k}{2^n}\,]}, n \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq 2^n$ (Dreieckschema)
$\Longrightarrow f_{k,n} \longrightarrow_{\text{n.M.}} 0 \,\Big(\mu(\{|\, f_{k,n} - 0\,| > \varepsilon\}) \leq 2^{-n} \longrightarrow_{n\to\infty} 0, \quad 0 < \varepsilon < 1\Big)$
aber $f_{k,n} \not\longrightarrow_{\text{f.ü.}} 0$, da $f_{k,n}(x) \not\longrightarrow 0 \quad \forall\, x \in X$

9.15 Satz

$\mu\, \sigma$–finit, dann

$$
f_n \longrightarrow_{\text{n.M.}} f \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} \text{zu jeder Teilfolge } (g_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ von } (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ existiert} \\ \text{Teilfolge } (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ von } (g_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ mit } h_n \longrightarrow_{\text{f.ü.}} f \end{array}
$$

Beweis:
$'' \Longleftarrow''$ Für jede Teilfolge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $f_n, n \in \mathbb{N}$, gilt:
ist $\varepsilon > 0$ und $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) < \infty$ gegeben, so besitzt die Zahlenfolge $\mu(\{|\, g_n - f\,| > \varepsilon\} \cap A)$ nach Voraussetzung und 9.13 eine Teilfolge, die gegen 0 konvergiert

$$\Longrightarrow \mu\Big(\{|\, f_n - f\,| > \varepsilon\} \cap A\Big) \longrightarrow 0 \quad \forall\, \varepsilon > 0 \text{ und } A \in \mathcal{A}, \mu(A) < \infty.$$

$'' \Longrightarrow ''$ (1) $f_n \longrightarrow_{\text{n.M.}} f \Longrightarrow f_n \longrightarrow_{\text{n.M.}} f$ für jede Teilfolge g_n von f_n
d.h. nur zu zeigen: es gibt eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_{n_k} \longrightarrow_{\text{f.ü.}} f$

(2) Sei μ finit, $\mu(\{|\, f_n - f\,|\}) \longrightarrow_{n\to\infty} 0 \quad \forall\,\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
&\{|\, f_n - f_m\,| > \varepsilon\} \subset \left\{|\, f_n - f\,| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cap \left\{|\, f_m - f\,| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \\
\Longrightarrow\quad & \mu(\ldots) \le \mu(\ldots) + \mu(\ldots) \longrightarrow_{n,m\to\infty} 0 \\
\Longrightarrow\quad & \text{ex. } n_k \in \mathbb{N}\,(k \in \mathbb{N}) \text{ mit} \\
& \mu(\{|\, f_n - f_{n_k}\,| > 2^{-k}\}) < 2^{-k} \quad \forall\, n \ge n_k
\end{aligned}$$

O.B.d.A. $n_1 \le n_2 \le \ldots$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow\quad & \mu(\{|\, f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\,| > 2^{-k}\}) < 2^{-k}, \quad k \in \mathbb{N} \\
\Longrightarrow\quad & \text{Mit } A_k := \{|\, f_{n_{k_n}} - f_{n_k}\,| > 2^{-k}\} \text{ sei} \\
& A := \limsup_{k\to\infty} A_k = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\ge n} A_k \\
\Longrightarrow\quad & \mu(A) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\mu\left(\bigcup_{k\ge n} A_k\right)}_{\le \sum_{k\ge n} \mu(A_k) \le \sum_{k\ge n} 2^{-k} \longrightarrow_{n\to\infty} 0} = 0.
\end{aligned}$$

Auf $A^c = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\ge n} A_k^c$ gilt

$$|\, f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\,| \le 2^{-k} \text{ für fast alle } k$$

$\Longrightarrow x \in A^c \Longrightarrow \sum_{k\in\mathbb{N}} |\, f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\,| < \infty$
d.h. $f_{n_k}(x)$ konvergiert eigentlich

$$\begin{aligned}
& \Longrightarrow f_{n_k} \longrightarrow_{\text{f.ü.}} \text{ für ein geeignetes } f' \in \mathcal{M}(X,\mathcal{A}) \\
& \Longrightarrow_{9.13} f_{n_k} \longrightarrow_{\text{n.M.}} f', f_{n_k} \longrightarrow_{\text{n.M.}} f \text{ (trivial)} \\
& \Longrightarrow_{9.11} f \overset{=}{\mu} f' \Longrightarrow_{9.4} f_{n_k} \longrightarrow_{\text{f.ü.}} f
\end{aligned}$$

(3) $\mu\,\sigma$–finit $\Longrightarrow\ \exists\, Y_k \in \mathcal{A}$ mit $Y_k \uparrow X$ und $\mu(Y_k) < \infty$;

$\mu_k(A) := \mu(A \cap Y_k)$ Maße mit $\mu(A) = \lim\limits_{k\to\infty} \mu_k(A), \quad A \in \mathcal{A}$.
$\Longrightarrow_{(2)}$ existiert Teilfolge $(f_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\begin{array}{ll} f_n^{(1)} \longrightarrow_{\text{f.ü.}} f & \text{bzgl. } \mu_1, \\ \text{ex. Teilfolge} & (f_n^{(2)})_{n\in\mathbb{N}} \text{ von } (f_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}} \text{ mit} \\ f_n^{(2)} \longrightarrow_{\text{f.ü.}} f & \text{bzgl. } \mu_2, \dots \\ & \text{u.s.w.} \end{array}$$

$(f_n^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ ist bis auf endlich viele Glieder Teilfolge aller $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$, $k \in \mathbb{N} \Longrightarrow f_n^{(n)} \longrightarrow_{\text{f.ü.}} f$ bezüglich aller μ_k

$$\text{d.h. } \mu(\{f_n^n \not\longrightarrow f\}) = \lim_{k\to\infty} \underbrace{\mu_k(\{f_n^n \not\longrightarrow f\})}_{\overset{\|}{0}} = 0.$$

□

9.16 Beispiel

Voraussetzung wie in 9.12

$$\Longrightarrow f_n \longrightarrow_{\text{n.M.}} 0 \text{ aber } h_n \not\longrightarrow_{\text{f.ü.}} 0 \ \forall \ \text{Teilfolgen } (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ von } f_n, n \in \mathbb{N}$$

d.h. Voraussetzung von μ σ–finit in 9.15 wesentlich.

9.17 Satz

μ σ–finit, $f_n^i \longrightarrow_{\text{n.M.}} f^i \quad (i = 1, \dots, k)$
$g : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig
$\Longrightarrow g\,(f_n^1, \dots, f_n^k) \longrightarrow_{\text{n.M.}} g\,(f^1, \dots, f^k)$

Beweis: Nach 9.15 existiert zu jeder Teilfolge der natürlichen Zahlen eine Teilfolge $(n_l)_{k\in\mathbb{N}}$ von $\mathbb{N}$ mit $f_{n_l}^i \longrightarrow_{\text{f.ü.}} f^i (i = 1, \dots, k)$

$$g\,(f_{n_l}^1, \dots, f_{n_l}^k) \longrightarrow_{\text{f.ü.}} g\,(f^1, \dots, f^k) \Longrightarrow_{9.15} \text{ Behauptung.}$$

□

10 Die Räume $\mathcal{L}_p$

10.1 Definition

$f \in \bar{\mathcal{M}}(X,\mathcal{A})$ beliebig, dann:

$$\begin{aligned}
\| f \|_p &:= \left(\int | f |^p d\mu \right)^{1/p}, 1 \leq p < \infty \left(| f |^p \in \bar{\mathcal{M}}_+(X,\mathcal{A}) \right) \\
\| f \|_\infty &:= \inf \left\{ a \geq 0 : \mu(\{| f | > a\}) = 0 \right\} \\
&\quad (:= \infty \text{ falls } \{\ldots\} = \emptyset)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f \ p\text{–fach integrierbar} &:\Longleftrightarrow \| f \|_p < \infty \\
f \text{ quadratisch integrierbar} &:\Longleftrightarrow \| f \|_2 < \infty \\
f \mu\text{–fast beschränkt} &:\Longleftrightarrow \| f \|_\infty < \infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_p := \mathcal{L}_p(\mu) := \mathcal{L}_p(X,\mathcal{A},\mu) &:= \{f \in \mathcal{M}(X,\mathcal{A}) : \| f \|_p < \infty\}, \\
&\qquad 1 \leq p \leq \infty
\end{aligned}$$

10.2 Satz

$f, g \in \bar{\mathcal{M}}(X,\mathcal{A}), f \overset{=}{\mu} g$
$\Longrightarrow_{7.18} \| f \|_p = \| g \|_p$

10.3 Satz

$\| af \|_p = | a | \, \| f \|_p$ für $f \in \bar{\mathcal{M}}(X,\mathcal{A})$, $a \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$ (nach 7.14)
(dabei $0 \cdot \infty = 0$)

10.4 Satz (Höldersche Ungleichung)

Für $f, g \in \bar{\mathcal{M}}(X,\mathcal{A}), 1 \leq p, q \leq \infty$ mit $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ gilt:

$$\| f \, g \|_1 \leq \| f \|_p \cdot \| g \|_q$$

Beweis:

(1) O.B.d.A. $\| f \|_p > 0, \| g \|_q > 0, \| f \|_p < \infty, \| g \|_q < \infty$

$$\left(\| f \|_p = 0 \Longrightarrow \int | f |^p d\mu = 0 \Longrightarrow f \overset{=}{\mu} 0 \right.$$

$$\left. \Longrightarrow f \, g \overset{=}{\mu} 0 \Longrightarrow \| f \, g \|_1 = 0 \right),$$

$$
\begin{aligned}
\| f \|_p &= \| g \|_q = 1 \\
\Big(\| f \cdot g \|_1 &= \left\| \| f \|_p \cdot \frac{f}{\| f \|_p} \cdot \| g \|_q \cdot \frac{g}{\| g \|_q} \right\|_1 \\
&=_{10.2} \| f \|_p \, \| g \|_q \cdot \left\| \frac{f}{\| f \|_p} \cdot \frac{g}{\| g \|_q} \right\|_1 \\
&\leq \| f \|_p \cdot \| g \|_q \cdot \left\| \frac{f}{\| f \|_p} \right\|_p \cdot \left\| \frac{g}{\| g \|_q} \right\|_q \\
&= \| f \|_p \cdot \| g \|_q \Big)
\end{aligned}
$$

(2) Sei $p = \infty$, also $q = 1$.
Nach 10.2 o.B.d.A. $|\, f(x) \,| \leq 1$ für alle $x \in X$ annehmbar; dann:

$$
\| fg \|_1 = \int \| f\, g \| d\mu \leq \int |\, g \,| d\mu = \underbrace{|\, f \,|_p}_{=1} \cdot \| g \|_q
$$

(3) Sei $1 < p, q < \infty$ $\left(\text{und } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$

$y\, z \leq \frac{y^p}{p} + \frac{z^q}{q}$ $(y \geq 0, z \geq 0)$

$\Big($ für $y = 0$ oder $z = 0$ trivial. Sei $y > 0$ und $z > 0$

$h(t) := \frac{t^p}{p} + \frac{t^{-q}}{q}$ $(0 < t < \infty)$

$\Longrightarrow h'(t) = t^{p-1} - t^{-q-1} = 0 \iff t = 1$

$\lim_{t \downarrow 0} h(t) = \lim_{t \uparrow \infty} h(t) = \infty$

$\Longrightarrow \frac{t^p}{p} + \frac{t^{-q}}{q} \geq h(1) = 1 \quad \forall\, t$

z.B. für $t = \frac{y^{1/q}}{z^{1/p}}$ gilt somit $(p\, q^{-1} + 1 = p, q\, p^{-1} + 1 = q)$

$$
\frac{y^{\frac{p}{q}}}{z\, p} + \frac{z^{\frac{q}{p}}}{y\, q} \geq 1 \Longrightarrow \frac{y^{\frac{p}{q}+1}}{p} + \frac{z^{\frac{q}{p}+1}}{q} \geq y\, z \Big)
$$

damit folgt:

$$\begin{aligned}
|\, f(x)\, g(x)\,| &\leq \frac{|\, f(x)\,|^p}{p} + \frac{|\, g(x)\,|^q}{q} \quad \forall\, x \in X \\
\Longrightarrow \int |\, f\, g\,| d\mu &\leq \frac{1}{p} \underbrace{\int |\, f\,|^p d\mu}_{=1} + \frac{1}{q} \underbrace{\int |\, g\,|^q d\mu}_{=1} = 1
\end{aligned}$$

d.h.

$$\|\, f\, g\,\|_1 \leq 1 = \|\, f\,\|_p \;\|\, g\,\|_q$$

$\square$

10.5 Beispiel (Schwarzsche Ungleichung)

Für $f.g \in \bar{\mathcal{M}}(X, \mathcal{A})$ gilt:

$$\left(\int |\, f \cdot g\,| d\mu\right)^2 \leq \int f^2 d\mu \cdot \int g^2 d\mu$$

speziell: $X := \{1, 2, \ldots, n\}, \mathcal{A} := \mathcal{P}(X), \mu(A) := |\, A\,|, \quad y, z \in \mathbb{R}^n$
$f(i) := y_i, g(i) := z_i, \quad 1 \leq i \leq n$

$$\begin{aligned}
\left(\int f\, g\, d\mu\right)^2 &= \left(\sum_{1 \leq i \leq n} y_i \cdot z_i\right)^2 \leq \left(\sum_{1 \leq i \leq n} y_i^2\right) \cdot \left(\sum_{1 \leq i \leq n} z_i^2\right) \\
&= \left(\int f^2\, d\mu\right) \left(\int g^2\, d\mu\right).
\end{aligned}$$

10.6 Satz

$f\, g \in \mathcal{L}$, falls $f \in \mathcal{L}_p, g \in \mathcal{L}_p$ mit $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1 \quad (1 \leq p, q \leq \infty)$

Beweis: 10.4.

10.7 Satz (Minkowskische Ungleichung)

Für $f, g \in \bar{\mathcal{M}}(X, \mathcal{A})$ mit überall definierter Summe und $1 \leq p \leq \infty$ gilt:

$$\|\, f + g\,\|_p \leq \|\, f\,\|_p + \|\, g\,\|_p$$

Beweis:

(1) Für $p = \infty$ mittels üblicher Dreiecksungleichung.

(2) Für $p < \infty$ o.B.d.A. $\| f \|_p > 0$

$(\| f \|_p = 0 \Longrightarrow f \overset{=}{\mu} 0 \Longrightarrow f + g \overset{=}{\mu} g)$

$\| g \|_p > 0, \| f \|_p < \infty, \| g \|_p < \infty,$

also auch $\| f + g \|_p < \infty$

$$\Big(| f + g |^p \leq 2^p \left(\frac{| f | + | g |}{2} \right)^p \leq 2^p \frac{| f |^p + | g |^p}{2}$$

da $t \longrightarrow t^p$ konvex.

(3)

$$\begin{aligned}
\| f + g \|_p^p &= \int | f + g |^p d\mu \\
&= \int | f + g | \, |f + g |^{p-1} d\mu \\
&\leq \int (| f | + | g |) \, | f + g |^{p-1} d\mu \\
&= \int | f | \, | f + g |^{p-1} d\mu + \int | g | \, | f + g |^{p-1} d\mu \\
\Big(\text{Höldersche Ungl. mit } q &= \frac{p}{p-1}\Big) \\
&\leq \| f \|_p \cdot \| (f + g)^{p-1} \|_q + \| g \|_p \, \| (f + g)^{p-1} \|_q \\
&= (\| f \|_p + \| g \|_p) \quad \underbrace{\| (f + g)^{p-1} \|_q}_{= \Big(\underbrace{\int | f + g |^{\frac{p-1}{p-1} \cdot p} \Big)^{\frac{p-1}{p}}}_{= \| f+g \|_p^{p-1}}} \\
\text{da } \| f + g \|_p &< \infty \\
&\Longrightarrow \| f + g \|_p \leq \| f \|_p + \| g \|_p
\end{aligned}$$

□

10.8 Definition

(a) $\tilde{f} := \{ g \in \bar{\mathcal{M}}(X, \mathcal{A}) : g \overset{=}{\mu} f \}$
$\tilde{f_1} + \tilde{f_2} := \widetilde{f_1 + f_2}$
$a\tilde{f} := \widetilde{af}, a \in \mathbb{R}$
$(f_1, f_2, f \in \bar{\mathcal{M}}(X, \mathcal{A}), f_1 + f_2$ sei definiert).

(b) $L_p := L_p(\mu) := L_p(X, \mathcal{A}, \mu) := \{\tilde{f} : f \in \mathcal{L}_p\}$
$\| \tilde{f} \|_p := \| f \|_p$ für $\tilde{f} \in L_p (1 \leq p \leq \infty), f \in \tilde{f}$
($f \overline{\overline{\mu}}\, g$ ist Äquivalenzrelation, alle Definitionen sind unabhängig von der Auswahl der Repräsentanten $f \in \tilde{f}$).

10.9 Satz

L_p ist mit $\| \cdot \|_p$ ein normierter linearer Raum ($1 \leq p \leq \infty$).

Beweis: 10.2, 10.3, 10.7. □

10.10 Satz

$\mu/\mathcal{A}$ finit, $1 \leq p \leq q \leq \infty$
$\Longrightarrow$ (1) $\mathcal{L}_p \supset \mathcal{L}_q$
(2) $\mu(X)^{1/q} \cdot \| f \|_p \leq \mu(X)^{1/p} \| f \|_q$

Beweis:

(0) Für $q = \infty$ trivial.

$$\left(\| f \|_p = \left(\int | f |^p d\mu \right)^{1/p} \leq \left(\int \| f \|_\infty^p d\mu \right)^{1/p} = \left(\mu(X) \cdot \| f \|_\infty^p \right)^{1/p} = \mu(X)^{1/p} \cdot \| f \|_\infty \right)$$

(1) $| f |^p \leq | f |^q + 1$

(2) o.B.d.A. $\mu(X) = 1$ annehmbar
$\Bigg($Falls $\mu(X) = 0$ trivial; andernfalls sei $\mu' := \dfrac{\mu}{\mu(X)}$

$$\begin{aligned}
\text{und damit } \| f \|_p &= \left(\int | f |^p d\mu \right)^{1/p} \\
&= \left(\mu(X) \cdot \int | f |^p d\mu' \right)^{1/p} \\
&= \mu(X)^{1/p} \cdot \| f \|_p^{\mu'} \\
&\leq \mu(X)^{1/p} \cdot \| f \|_q^{\mu'} \\
&= \mu(X)^{1/p} \cdot \| f \|_q^{\mu} \cdot \mu(X)^{-1/q} \Big)
\end{aligned}$$

Dann:

$$\begin{aligned}
\| f \|_p = \left(\int | f |^p d\mu \right)^{1/p} &= \left(\big\| \, | f |^p \cdot 1 \, \big\|_1 \right)^{1/p} \\
\text{Hölder} \qquad &\leq \left(\Big\| \, | f |^p \, \Big\|_{\frac{q}{p}} \cdot \| 1 \|_{\frac{q}{q-p}} \right)^{1/p}, \quad q \geq p \\
&= \left(\left(\int (| f |^p)^{q/p} d\mu \right)^{p/q} \right)^{1/p} \\
&= \| f \|_q
\end{aligned}$$

□

10.11 Beispiel:

$X := \mathbb{N}, \mathcal{A} := \mathcal{P}(X), \mu(A) := | A |$
$f(n) := 1/n, n \in \mathbb{N}$

$$\Longrightarrow \int f^p d\mu =_{7.20} \sum_{n \in \mathbb{N}} 1/n^p = \begin{cases} < \infty & p > 1 \\ = \infty & p = 1 \end{cases}$$

d.h. $f \in \mathcal{L}_p$ für $p > 1$,
aber $f \notin \mathcal{L}_1$, d.h. Voraussetzung μ–finit ist wesentlich in 10.10.

10.12 Definition

$1 \leq p < \infty, f_n, f \in \mathcal{L}_p, n \in \mathbb{N}$, dann

$$f_n \longrightarrow_{\mathcal{L}_p} f :\Longleftrightarrow \| f_n - f \|_p \longrightarrow_{n \to \infty} 0$$

($f_n \longrightarrow f$ im p–ten Mittel)
$p = 1$ "Konvergenz im Mittel"
$p = 2$ "Konvergenz im quadratischen Mittel"

10.13 Satz

$1 \leq p < \infty, f_n, f \in \mathcal{L}_p, n \in \mathbb{N}$, dann

$$f_n \longrightarrow_{\mathcal{L}_p} f \Longrightarrow f_n \longrightarrow_{\text{n.M.}} f$$

Beweis:
$|\, f_n - f \,|^p \geq \varepsilon^p \cdot 1_{\{|\, f_n - f \,| > \varepsilon\}}$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad & \mu\Big(\{|\, f_n - f \,| > \varepsilon\} \cap A\Big) \\ \leq \quad & \mu\Big(\{|\, f_n - f \,| > \varepsilon\}\Big) \\ = \quad & \int 1_{\{|\, f_n - f \,| > \varepsilon\}} d\mu \\ \leq \quad & \frac{1}{\varepsilon^p}\Big(\|\, f_n - f \,\|_p\Big)^p \longrightarrow_{n \to \infty} 0. \end{aligned}$$

□

10.14 Beispiel

$f_n \longrightarrow_{\mathcal{L}_p} f \not\Longrightarrow f_n \longrightarrow_{\text{f.ü.}} f$
9.14: $f_n \longrightarrow_{\mathcal{L}_p} 0 \quad \forall \in [\,1, \infty)$
aber $f_n(x) \not\longrightarrow 0 \quad \forall\, x \in [\,0, 1\,]$.

10.15 Beispiel

$f_n \longrightarrow_{\text{f.ü.}} f \not\Longrightarrow f_n \longrightarrow_{\mathcal{L}_p} f$

$(X, \mathcal{A}, \mu) := ([\,0, 1\,], \mathcal{B} \cap [\,0, 1\,], \lambda_{[\,0,1\,]})$
$f_n := n^{1/p} \cdot 1_{[\,0, \frac{1}{n}\,]}$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow f_n \longrightarrow_{\text{f.ü.}} 0 \quad \text{aber} \quad \int_0^1 f_n^p d\mu = \int_0^{1/n} n = 1 \\ \Longrightarrow \quad f_n \not\longrightarrow_{\mathcal{L}_p} 0. \end{aligned}$$

11 Dichten

Im Folgenden sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum.

11.1 Satz.

Sei $f \in \bar{\mathcal{M}}_+(X, \mathcal{A})$; definiere $\nu : \mathcal{A} \longrightarrow [\,0, \infty\,]$ durch

$$\nu(A) := \int_A f \, d\mu, \quad A \in \mathcal{A}.$$

Dann ist $\nu/\mathcal{A}$ ein Maß.

Beweis: $\nu(\emptyset) = 0$; seien $A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt, dann:

$$\begin{aligned}
\nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) &= \int f \, 1_{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n} d\mu = \int f \sum_{n\in\mathbb{N}} 1_{A_n} d\mu \\
&= \int \sum_{n\in\mathbb{N}} (f \, 1_{A_n}) \, d\mu = \int \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} f \, 1_{A_n} d\mu \\
&=_{8.1} \lim_{m\to\infty} \int \sum_{n=1}^{m} f \, 1_{A_n} d\mu = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \int f \, 1_{A_n} d\mu \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(A_n).
\end{aligned}$$

□

11.2 Definition.

$\nu/\mathcal{A}$ sei Maß. Ein $f \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{A})$ heißt ***μ–Dichte von ν***
$:\Longleftrightarrow \quad \forall \, A \in \mathcal{A} : \nu(A) = \int_A f \, d\mu.$

Bezeichnung: $\dfrac{d\nu}{d\mu}$:= Familie (Menge) der μ–Dichten von ν.

11.3 Satz.

Es sei $f \in d\nu/d\mu$ und $g \in \bar{\mathcal{M}}_+(X, \mathcal{A})$, dann:

(i) $f \overset{=}{\mu} g \Longrightarrow g \in d\nu/d\mu$.

(ii) $g \in d\nu/d\mu, \mu \, \sigma$–endlich $\Longrightarrow g \overset{=}{\mu} f$.

Beweis:

(i) 7.18.

(ii) $\{g \neq f\} = \{g > f\} \cup \{g < f\} =: N \cup M$.
Es genügt zu zeigen: $\mu(N) = 0 = \mu(M)$.

(1) Sei $f \in \mathcal{L}(\mu)$, dann:

$$\int (g-f)1_N \, d\mu = \int g\, 1_N \, d\mu - \int f\, 1_N \, d\mu = \nu(N) - \nu(N) = 0.$$

Da $(g-f)\, 1_N \geq 0$ folgt daraus $(g-f)\, 1_N \overset{=}{\mu} 0 \Longrightarrow 1_N \overset{=}{\mu} 0 \Longrightarrow \mu(N) = 0$.

(2) Seien $X_i \in \mathcal{A}, i \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt mit $\bigcup\limits_i X_i = X$ und $\mu(X_i) < \infty$. Setze $B_m := \{m-1 \leq f < m\}, m \in \mathbb{N}$. Dann:

$$N \subset \bigcup_m B_m$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow N &= N \cap \left(\bigcup_i X_i\right) \cap \left(\bigcup_m B_m\right) \\ &= \bigcup_{i,m} (N \cap X_i \cap B_m) =: \bigcup_{i,m} N_{i,m}. \end{aligned}$$

Es genügt zu zeigen, dass $\mu(N_{i,m}) = 0 \;\forall\, i, m$. Dies folgt aber aus der Argumentation in (1), angewendet auf $g\, 1_{N_{i,m}}, f\, 1_{N_{i,m}}$; beachte, dass $\int f\, 1_{N_{i,m}} d\mu \leq \int m\, 1_{N_{i,m}} d\mu \leq m \int 1_{X_i}\, d\mu$ $= m\mu(X_i) < \infty$. $\mu(M) = 0$ wird analog gezeigt. □

11.4 Definition.

$\nu/\mathcal{A}$ sei Maß. ν heißt absolut stetig bezüglich $\mu :\Longleftrightarrow$

$$\forall\, A \in \mathcal{A}, \mu(A) = 0 \Longrightarrow \nu(A) = 0.$$

Bezeichnung in diesem Fall: $\nu \ll \mu$ (μ dominiert ν).

11.5 Satz.

$\dfrac{d\nu}{d\mu} \neq \emptyset \Longrightarrow \nu \ll \mu.$

Beweis: Sei $f \in d\nu/d\mu$ und $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) = 0 \Longrightarrow f\, 1_A \overset{=}{\mu} 0$

$$\Longrightarrow_{7.18} 0 = \int f\, 1_A\, d\mu = \nu(A). \qquad \square$$

Falls μ zusätzlich σ–endlich ist, so gilt auch die Umkehrung von Satz 11.5.

11.6 Satz (Radon–Nikodym).

$\mu\, \sigma$–endlich, $\nu \ll \mu \Longrightarrow \dfrac{d\nu}{d\mu} \neq \emptyset$.

Beweis: S. Bauer, Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie, Satz 17.10. $\square$

11.7 Satz.

$f \in d\nu/d\mu, h \in \hat{\mathcal{L}}(\nu)$, dann gilt:

(i) $f\, h \in \hat{\mathcal{L}}(\mu)$

(ii) $\displaystyle\int h\, d\nu = \int h\, f\, d\mu$.

Beweis:

(1) Die Behauptungen folgen für $h = 1_A, A \in \mathcal{A}$, aus der Definition von Dichten: $\displaystyle\int h\, d\nu = \int 1_A\, d\nu = \nu(A) = \int f\, 1_A\, d\mu = \int h\, f\, d\mu$.

(2) Sei $h = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i\, 1_{A_i}, a_i \geq 0, A_i \in \mathcal{A}$, einfache Funktion. Dann:

$$\begin{aligned} \int h\, d\nu = \sum_{i=1}^{n} a_i\, \nu(A_i) &= \sum_{i=1}^{n} a_i \int f\, 1_{A_i}\, d\mu = \int f \sum_{i=1}^{n} a_i\, 1_{A_i}\, d\mu \\ &= \int f\, h\, d\mu. \end{aligned}$$

(3) Sei $h \in \bar{\mathcal{M}}_+(X, \mathcal{A})$. 7.7 $\Longrightarrow\ \exists\ e_n \in \mathcal{E}(X, \mathcal{A}), n \in \mathbb{N}, e_n \uparrow h \Longrightarrow f\, e_n \uparrow f\, h$. Damit folgt aus (2) und dem Satz von der monotonen Konvergenz 8.1:

$$\int h\, d\nu = \lim_{n\to\infty} \int e_n\, d\nu =_{(2)} \lim_{n\to\infty} \int e_n\, f\, d\mu =_{8.1} \int h\, f\, d\mu.$$

(4) Sei $h \in \hat{\mathcal{L}}(\nu)$; o.E. $\int h^+ \, d\nu < \infty \Longrightarrow_{(3)} \infty > \int h^+ \, d\nu = \int h^+ \, f \, d\mu \Longrightarrow$ $f\, h \in \hat{\mathcal{L}}(\mu)$, da $(f\, h)^+ = f\, h^+$. Damit nach (3)

$$\begin{aligned}\int h \, d\nu &= \int h^+ \, d\nu - \int h^- \, d\nu \\ &= \int h^+ \, f \, d\mu - \int h^- \, f \, d\mu = \int h \, f \, d\mu.\end{aligned}$$

□

12 Das Produkt endlich vieler Maßräume

12.1 Definition

$(X, \mathcal{A})$ Produkt von $(X_1, \mathcal{A}_1), (X_2, \mathcal{A}_2)$

$$
\begin{aligned}
:\Longleftrightarrow\; X = X_1 \times X_2, \mathcal{A} &= \sigma(\{A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\}) \\
&=: \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \\
\text{symbolisch: } (X, \mathcal{A}) &=: (X_1, \mathcal{A}_1) \otimes (X_2, \mathcal{A}_2)
\end{aligned}
$$

Bemerkung: $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 = \sigma(\{A_1 \times X_2 : A_1 \in \mathcal{A}_1\} \cup \{X_1 \times A_2 : A_2 \in \mathcal{A}_2\})$

12.2 Satz

$(X_1, \mathcal{A}_1), (X_2, \mathcal{A}_2)$ messbare Räume, $p_i : X_1 \times X_2 \Longrightarrow X_i$,
$p_i(x_1, x_2) := x_i, \quad i = 1, 2$; dann gilt:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 &= \sigma(p_1, p_2) \quad \text{(vgl. 6.5)} \\
&= \text{kleinste } \sigma\text{–Algebra } \mathcal{A} \text{ über } X_1 \times X_2, \text{ so dass} \\
&\quad\; p_i \text{ ist } \mathcal{A} - \mathcal{A}_i\text{–messbar}, \quad i = 1, 2
\end{aligned}
$$

Beweis: $p_1^{-1}(A_1) = A_1 \times X_2$, $p_2^{-1}(A_2) = X_1 \times A_2$, obige Bemerkung. □

12.3 Satz

$(X_i, \mathcal{A}_i)$ messbarer Raum, $i = 1, 2$, $\quad \mathcal{E}_i$ Erzeuger von $\mathcal{A}_i$ mit $X_i = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} E_{i\,k}$
für geeignete $E_{ik} \in \mathcal{E}_i, k \in \mathbb{N}, i = 1, 2$

$$\Longrightarrow \mathcal{E} := \{E_1 \times E_2 : E_1 \in \mathcal{E}_1, E_2 \in \mathcal{E}_2\} \text{ ist Erzeuger von } \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$$

Beweis: Nach 12.2 ist zu zeigen: $\sigma(\mathcal{E})$ ist die kleinste σ–Algebra, bzgl. der p_1 und p_2 messbar sind.

(1) Sei $\mathcal{A}$ eine σ–Algebra über $X_1 \times X_2$, bzgl. der p_1 und p_2 messbar sind.

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow E_1 \times E_2 &= (E_1 \times X_2) \cap (X_1 \times E_2) \\
&= \underbrace{p_1^{-1}(E_1)}_{\in \mathcal{A}} \cap \underbrace{p_2^{-1}(E_2)}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A} \quad \forall\, E_i \in \mathcal{E}_i, \quad i = 1, 2
\end{aligned}
$$

$$\Longrightarrow \mathcal{E} \subset \mathcal{A} \;\Longrightarrow\; \sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}$$

(2) p_1 und p_2 sind bzgl. $\sigma(\mathcal{E})$ messbar:

$$\begin{aligned} p_1^{-1}(E_1) &= E_1 \times X_2 \\ &= \lim_{k\to\infty} \underbrace{(E_1 \times E_{2k})}_{\in\mathcal{E}} \in \sigma(\mathcal{E}) \quad \forall\, E_1 \in \mathcal{E}_1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6.3 &\implies p_1 \text{ messbar bzgl. } \sigma(\mathcal{E}) \\ \text{analog:} &\qquad\ \ p_2 \text{ messbar bzgl. } \sigma(\mathcal{E}) \end{aligned}$$

12.4 Beispiel

$\mathcal{B}_2 = \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}$

$(\mathcal{E}_1 := \mathcal{E}_2 := \{[\,a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$

Erzeuger von $\mathcal{B}, E_k := [\,-k, k), k \in \mathbb{N}$,

$$\Longrightarrow_{12.3} \{[\,a, b) \subset \mathbb{R}^2 : a, b \in \mathbb{R}^2\} \text{ Erzeuger von } \mathcal{B} \otimes \mathcal{B},$$

andererseits: $\mathcal{B}_2 = \sigma(\{[\,a, b) \subset \mathbb{R}^2 : a, b \in \mathbb{R}^2\})$ (s. 5.4)

12.5 Definition

X_1, X_2 beliebige Mengen, $A \subset X := X_1 \times X_2$
dann setzen wir für $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$

$$\begin{aligned} A_{x_1} &:= \{x \in X_2 : (x_1, x) \in A\} \\ A_{x_2} &:= \{x \in X_1 : (x, x_2) \in A\}, \end{aligned}$$

"Schnittmengen von A"

12.6 Satz

$X = X_1 \times X_2, x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, A, A_i \subset X, i \in \mathbb{N}$, dann:

$$(A^c)_{x_1} = (A_{x_1})^c, \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)_{x_1} = \bigcup_{i\in I} (A_i)_{x_1}, X_{x_1} = X_2, \text{ entsprechend für } x_2.$$

12.7 Satz

$(X, \mathcal{A}) = (X_1, \mathcal{A}_1) \otimes (X_2, \mathcal{A}_2), \quad A \in \mathcal{A}$

$\Longrightarrow A_{x_1} \in \mathcal{A}_2 \ \forall x_1 \in X_1, A_{x_2} \in \mathcal{A}_1, \ \forall x_2 \in X_2$

Beweis: $\mathcal{A}^* := \{B \in \mathcal{A}$: Behauptung richtig für $B\}$

$$\begin{array}{rll} \Longrightarrow & (1) & \mathcal{A}^* \supset \{A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\} \\ & (2) & \mathcal{A}^* \text{ ist } \sigma\text{–Algebra (vgl. 12.6)} \\ \Longrightarrow_{\mathcal{A}^* \subset \mathcal{A}} & & \mathcal{A}^* = \mathcal{A} \end{array}$$

□

12.8 Satz

$(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1), (X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ seien σ–finite Maßräume, $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$

$$\begin{array}{rcl} \Longrightarrow g_A : X_1 & \longrightarrow & \bar{\mathbb{R}}_+ \text{ mit } g_A(x_1) := \mu_2(A_{x_1}) \text{ ist } \mathcal{A}_1\text{–messbar} \\ h_A : X_2 & \longrightarrow & \bar{\mathbb{R}}_+ \text{ mit } h_A(x_2) := \mu_1(A_{x_2}) \text{ ist } \mathcal{A}_2\text{–messbar.} \end{array}$$

Beweis: (a) μ_2 finit, $\mathcal{D} := \{D \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 : g_D \in \bar{\mathcal{M}}_+(X_1, \mathcal{A}_1)\}$, dann gilt:

(1) $\mathcal{D} \supset \{A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\}$

$$\left(\begin{array}{rcl} g_{A_1 \times A_2}(x_1) & = & \begin{cases} \mu_2(A_2), & x_1 \in A_1 \\ 0, & x_1 \notin A_1 \end{cases} \\ \text{d.h. } g_{A_1 \times A_2} & = & \mu_2(A_2) \cdot 1_{A_1} \end{array} \right)$$

(2) $\mathcal{D}$ ist Dynkin–System über $X_1 \times X_2$

$\Big(X_1 \times X_2 \in \mathcal{D}$ nach (1), $D, E \in \mathcal{D}, D \subset E$, dann:

$$\begin{array}{rcl} g_{E \setminus D}(x_1) & = & \mu_2\Big((E \setminus D)_{x_1}\Big) = \mu_2(E_{x_1} \setminus D_{x_1}) \\ & = & \mu_2(E_{x_1}) - \mu_2(D_{x_1}) = g_E(x_1) - g_D(x_1) \Longrightarrow E \setminus D \in \mathcal{D}; \end{array}$$

$D_n \in \mathcal{D}, \quad n \in \mathbb{N}$ disjunkt

$$\Longrightarrow g_{\bigcup_n D_n} = \sum_{n \in \mathbb{N}} g_{D_n} \in \bar{\mathcal{M}}_+(X_1, \mathcal{A}_1) \Longrightarrow \bigcup_n D_n \in \mathcal{D} \Big)$$

also $\mathcal{D} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$
(Menge der messbaren Rechtecke in (1) ist $\cap$–stabiler Erzeuger von $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$,
2.19 $\Longrightarrow \delta(\{A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\}) = \sigma(\{A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\}) = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \delta(\{\ldots\}) \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$

(3) μ_2 σ–finit
$\Longrightarrow \ \exists\, Y_n \in \mathcal{A}_2$ mit $Y_n \uparrow X_2$ und $\mu_2(Y_n) < \infty$.
$\mu_{2_n} : \mathcal{A}_2 \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$ mit $\mu_{2_n}(A_2) := \mu_2(A_2 \cap Y_n), n \in \mathbb{N}$,
finite Maße mit $\mu_{2_n} \uparrow \mu_2$

$$\Longrightarrow g_A(x_1) = \lim_{n\to\infty} \mu_{2_n}(A_{x_1}) \quad \mathcal{A}\text{–messbar, (vgl. 6.18).}$$

$\square$

12.9 Satz

$(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ Maßraum, $i = 1, 2$, $\mathcal{E}_i$ $\cap$–stabiler Erzeuger von $\mathcal{A}_i$ mit
$\exists\, E_{ik} \in \mathcal{E}_i : E_{ik} \uparrow X_i$ und $\mu(E_{ik}) < \infty, \quad k \in \mathbb{N}, i = 1, 2.$
$\Longrightarrow \ \exists$ höchstens ein Maß μ auf $\mathcal{A} := \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ mit

$$\mu(E_1 \times E_2) = \mu_1(E_1) \cdot \mu_2(E_2) \; \forall\, E_1 \in \mathcal{E}_1, \forall\, E_2 \in \mathcal{E}_2$$

Beweis: $\{E_1 \times E_2 : E_1 \in \mathcal{E}_1, E_2 \in \mathcal{E}_2\}$ ist $\cap$–stabiler Erzeuger
von $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \Big((E_1 \times E_2) \cap (E_1' \times E_2')\Big) = (E_1 \cap E_1') \times (E_2 \cap E_2')$

$$\Longrightarrow_{4.7} \text{ Behauptung } (E_{1k} \times E_{2k} \uparrow X_1 \times X_2)$$

$\square$

12.10 Satz

$(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ σ–finiter Maßraum, $\quad i = 1, 2$
$\Longrightarrow \ \exists!$ Maß μ auf $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ mit

$$\mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2) \quad \forall\, A_1 \in \mathcal{A}_1, \forall\, A_2 \in \mathcal{A}_2$$

Beweis: Sei $g_A (A \in \mathcal{A})$ gemäß 12.8
(d.h. $g_A(x_1) := \mu_2(A_{x_1}), g_A \in \bar{\mathcal{M}}_+(X_1, \mathcal{A}_1))$

$$\begin{aligned} \text{Setze} \quad & \mu(A) := \int g_A d\mu_1 \quad A \in \mathcal{A} \\ \Longrightarrow \quad & \mu \geq 0, \mu(\emptyset) = 0; \quad A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}, \text{ disjunkt} \\ \Longrightarrow \quad & \mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \mu(A_n) \end{aligned}$$

$\Big(A_n$ disjunkt $\Longrightarrow (A_n)_{x_1}$ disjunkt $\Longrightarrow g_{\cup_n A_n} = \sum\limits_n g_{A_n}, 8.1\Big)$

$$\begin{aligned} \mu(A_1 \times A_2) &= \int g_{A_1 \times A_2} d\mu_1 = \int \mu_2\Big((A_1 \times A_2)_{x_1}\Big) d\mu_1 \\ &= \int \mu_2(A_2) \cdot 1_{A_1} d\mu_1 \\ &= \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2) \end{aligned}$$

Die Eindeutigkeit folgt aus 12.9. □

12.11 Definition

$(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ σ–finiter Maßraum, $i = 1, 2$
$(X, \mathcal{A}, \mu) = (X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1) \otimes (X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$
$:\Longleftrightarrow \; X = X_1 \times X_2, \mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2,$
$\mu =: \mu_1 \otimes \mu_2$ das gemäß 12.10 eindeutig bestimmte Maß auf $(X, \mathcal{A})$ mit $\mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2), \quad \forall A_1 \in \mathcal{A}_1 \quad \forall A_2 \in \mathcal{A}_2$.

Bezeichnung: "Produktmaß".

12.12 Beispiel

$(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_2, \lambda_2) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda) \otimes (\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$, denn:
nach 12.2 gilt $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_2) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \otimes (\mathbb{R}, \mathcal{B})$,
nach 5.7 – 5.11 gilt: $\lambda_2(I_1 \times I_2) = \lambda(I_1) \cdot \lambda(I_2)$,
wobei $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$
$\Longrightarrow \lambda_2/\mathcal{I}_2 = (\lambda \otimes \lambda)/\mathcal{I}_2$
$\Longrightarrow \lambda_2 = \lambda \otimes \lambda$

12.13 Definition

$f : X_1 \times X_2 \longrightarrow X'$ beliebige Abbildung, dann setzen wir für $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$

$$\begin{array}{llll} f_{x_1} : X_2 \longrightarrow X' & \text{mit} & f_{x_1}(x) := f(x_1, x) & \forall\, x \in X_2 \\ f_{x_2} : X_1 \longrightarrow X' & \text{mit} & f_{x_2}(x) := f(x, x_2) & \forall\, x \in X_1. \end{array}$$

Dies sind die "Schnittfunktionen zu f".

12.14 Beispiele

(1) $A \subset X_1 \times X_2 \Longrightarrow (1_A)_{x_1} = 1_{(A_{x_1})}$

(2) $f : X_1 \times X_2 \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}, a \in \mathbb{R} \Longrightarrow (a\, f)_{x_1} = a \cdot f_{x_1}$

(3) $f_1, f_2 : X_1 \times X_2 \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}_+ \Longrightarrow (f_1 + f_2)_{x_1} = (f_1)_{x_1} + (f_2)_{x_1}$

12.15 Satz

$(X, \mathcal{A}) = (X_1, \mathcal{A}_1) \otimes (X_2, \mathcal{A}_2), \quad f \in \bar{\mathcal{M}}(X, \mathcal{A})$

$$\Longrightarrow \quad \begin{array}{ll} f_{x_1} \in \bar{\mathcal{M}}(X_2, \mathcal{A}_2) & \forall\, x_1 \in X_1 \\ f_{x_2} \in \bar{\mathcal{M}}(X_1, \mathcal{A}_1) & \forall\, x_2 \in X_2 \end{array}$$

Beweis: Sei $B \in \bar{\mathcal{B}}$

$$\begin{array}{rcl} \Longrightarrow f_{x_1}^{-1}(B) & = & \{x_2 \in X_2 : f_{x_1}(x_2) \in B\} \\ & = & \{x_2 \in X_2 : (x_1, x_2) \in f^{-1}(B)\} \\ & = & \left(\underbrace{f^{-1}(B)}_{\in \mathcal{A}}\right)_{x_1} \in \mathcal{A}_2 \text{ nach 12.7; } f_{x_2} \text{ analog.} \end{array}$$

□

12.16 Satz (Fubini)

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ Produkt der σ–finiten Maßräume
$(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i), i = 1, 2, f \in \bar{\mathcal{M}}_+(X, \mathcal{A})$

$$\Longrightarrow g_f : X_1 \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}_+ \quad \text{mit} \quad g_f(x_1) := \int f_{x_1} d\mu_2 \quad \text{ist } \mathcal{A}_1\text{–messbar}$$

$$h_f : X_2 \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}_+ \quad \text{mit} \quad h_f(x_2) := \int f_{x_2} d\mu_1 \quad \text{ist } \mathcal{A}_2\text{–messbar}$$

$$\begin{aligned}
\int f d\mu &= \int g_f d\mu_1 = \int h_f d\mu_2, \text{ d.h. es gilt:} \\
\int\limits_{X_1 \times X_2} f d\mu &= \int\limits_{X_1} \left(\int\limits_{X_2} f(x_1, x_2) \mu_2(dx_2) \right) \mu_1(dx_1) \\
&= \int\limits_{X_2} \left(\int\limits_{X_1} f(x_1, x_2) \mu_1(dx_1) \right) \mu_2(dx_2)
\end{aligned}$$

Beweis:

(0) g_f und h_f definiert wegen 12.15.

(1) Behauptung richtig, falls $f = 1_A$ mit $A \in \mathcal{A}$:

$$g_f(x_1) = \int (1_A)_{x_1} d\mu_2 =_{12.14(1)} \int 1_{A_{x_1}} d\mu_2 = \mu_2(A_{x_1})$$

$\Longrightarrow g_f\ \mathcal{A}_1$–messbar mit: $\int g_f d\mu_1 = \mu(A) = \int 1_A d\mu$
(vgl. 12.8 und 12.10)

(2) Behauptung richtig für alle $e \in \mathcal{E}(X, \mathcal{A})$

$$\begin{aligned}
\Big((af)_{x_1} &= a \cdot f_{x_1} \quad (12.14(2)), \\
(f_1 + f_2)_{x_1} &= (f_1)_{x_1} + (f_2)_{x_1} \quad (12.14(3))\Big)
\end{aligned}$$

(3) $f \in \bar{\mathcal{M}}_+(X, \mathcal{A})$

$\Longrightarrow e_n \uparrow f$ für geeignete $e_n \in \mathcal{E}(X, \mathcal{A}), n \in \mathbb{N}$

$\Big(\Longrightarrow (e_n)_{x_1} \uparrow f_{x_1}\, \forall\, x_1 \in X_1$

$\Longrightarrow g_{e_n}(x_1) = \int (e_n)_{x_1}\, d\mu_2 \uparrow \int f_{x_1}\, d\mu_2 = g_f(x_1)$ (Satz von der monotonen Konvergenz.)

g_{e_n} $\mathcal{A}_1$–messbar, $\int e_n\, d\mu =_{(2)} \int g_{e_n}\, d\mu_1$

$\Longrightarrow g_f$ $\mathcal{A}_1$–messbar,

$\int f d\mu = \lim\limits_n \int e_n\, d\mu = \lim\limits_n \int g_{e_n}\, d\mu_1 = \int g_f\, d\mu_1$ (Satz von der monotonen Konvergenz.)

analog: h_f. □

12.17 Satz (Fubini)

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ Produkt der σ–finiten Maßräume $(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$, $\quad i = 1, 2$,
$f : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ μ–integrierbar. Dann:

$f_{x_1}\, \forall\, x_1$ außerhalb einer geeigneten μ_1–Nullmenge N_1 μ_2–integrierbar
$f_{x_2}\, \forall\, x_2$ außerhalb einer geeigneten μ_2–Nullmenge N_2 μ_1–integrierbar

$$\begin{aligned} g_f : N_1^c &\longrightarrow \mathbb{R} \text{ mit } g_f(x_1) := \int f_{x_1} d\mu_2 \text{ ist } \mu_1\text{–integrierbar} \\ h_f : N_2^c &\longrightarrow \mathbb{R} \text{ mit } h_f(x_2) := \int f_{x_2} d\mu_1 \text{ ist } \mu_2\text{–integrierbar} \end{aligned}$$

$$\int f d\mu = \int g_f d\mu_1 = \int h_f d\mu_2$$

Beweis: $f\mu$–integrierbar $\Longleftrightarrow_{7.12} f^+, f^-$ integrierbar

$$\begin{aligned} \Longrightarrow_{12.16} \int f^+\, d\mu &= \int\limits_{X_1} \left(\int\limits_{X_2} (f^+)_{x_1}\, d\mu_2 \right) \mu_1(dx_1) < \infty \\ \int f^-\, d\mu &= \int\limits_{X_1} \left(\int\limits_{X_2} (f^-)_{x_1}\, d\mu_2 \right) \mu_1(dx_1) < \infty \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ für alle x_1 außerhalb einer μ_1–Nullmenge N_1 gilt:

$$\begin{aligned} \int\limits_{X_2} (f^+)_{x_1} d\mu_2 &< \infty, \\ \int\limits_{X_2} (f^-)_{x_1} d\mu_2 &< \infty. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\int f d\mu &= \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \\
&= \int\limits_{N_1^c} \int\limits_{X_2} (f^+)_{x_1} d\mu_2 \; \mu_1(dx_1) - \int\limits_{N_1^c} \int\limits_{X_2} (f^-)_{x_1} d\mu_2 \; \mu_1(dx_1) \\
&= \int\limits_{N_1^c} \int\limits_{X_2} \Big((f^+)_{x_1} - (f^-)_{x_1} \Big) d\mu_2 \; \mu_1(dx_1) \\
&= \int\limits_{N_1^c} \int\limits_{X_2} \Big((f_{x_1})^+ - (f_{x_1})^- \Big) d\mu_2 \; \mu_1(dx_1) \\
&= \int\limits_{N_1^c} \int\limits_{X_2} f_{x_1} \, d\mu_2 \, \mu_1(dx_1) \\
&= \int\limits_{X_1} \left(\int\limits_{X_2} f_{x_1} d\mu_2 \right) \mu_1(dx_1).
\end{aligned}
$$

Bzgl. h_f analog. □

12.18 Beispiel

Die Diagonale $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$ im $\mathbb{R}^2$ hat das Lebesgue–Maß 0: $\lambda_2(D) = 0$.

Denn zunächst gilt $D = \{p_1 = p_2\} = \{p_1 - p_2 = 0\} \in \mathcal{B}_2 = \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}$, wobei $p_i : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ die i–te Projektion bezeichnet (s. 12.2). Ferner:

$$
\begin{aligned}
\lambda_2(D) &= \int 1_D(x, y) \, \lambda_2(d(x, y)) =_{12.17} \int \int 1_D(x, y) \, \lambda(dx) \, \lambda(dy) \\
&= \int \int 1_{\{y\}}(x) \, \lambda(dx) \, \lambda(dy) = \int \lambda(\{y\}) \, \lambda(dy) \\
&= \int 0 \, \lambda(dy) = 0.
\end{aligned}
$$

12.19 Beispiel (Prinzip des Cavalieri)

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ Produkt der σ–finiten Maßräume $(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i), i = 1, 2$. $E, F \in \mathcal{A}$ mit $\mu_2(E_x) = \mu_2(F_x)$ für μ_1–fast alle $x \in X_1$. Dann gilt $\mu(E) = \mu(F)$.

$$\begin{aligned} \text{Denn: } \mu(E) &= \int 1_E \, d\mu =_{12.16} \int \int 1_E(x, y) \, \mu_2(dy) \, \mu_1(dx) \\ &= \int \int 1_{E_x}(y) \, \mu_2(dy) \, \mu_1(dx) \\ &= \int \mu_2(E_x) \, \mu_1(dx) =_{7.17} \int \mu_2(F_x) \, \mu_1(dx) = \mu(F). \end{aligned}$$